Théorèmes sur les suites et séries de fonctions et les intégrales dépendant d'un paramètre

A. Suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues

1) Théorème de convergence dominée

Si $f(t) = \lim_{t\to+\infty} f_n(t)$, avec f_n et f continues (par morceaux) sur I et si $|f_n(t)| \le \varphi(t)$, avec $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable (domination uniforme par rapport à n assez grand), alors $\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\, dt = \int_I f(t)\, dt$.

Exemple : $\int_0^1 \ln(1+x^n)\, dx = \dfrac{1}{n}\int_0^1 \dfrac{\ln(1+u)}{u^{1-1/n}}\, du \sim \dfrac{\pi^2}{12n}$, car $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \dfrac{\ln(1+u)}{u^{1-1/n}}\, du = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+u)}{u}\, du$.

Exemple : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n x^{\alpha-1}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\, dx = \Gamma(\alpha)$. *Remarque* : Se ramener à $I = [0,+\infty[$.

2) Convergence uniforme

a) *Continuité* : Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f et les f_n continues, alors f est continue.

Remarque : Généralisation avc le théorème d'interversion des limites.

b) *Intégration* : Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur le *segment* $[a,b]$, alors $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt$.

c) *Dérivation* d'une limite d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de classe C^1.

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f et si $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g, alors f est C^1 et $f' = g$.
De plus, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment.

Important : Pour a) et c), il suffit que les convergences soient uniformes sur tout segment.

B. Séries $\sum f_n$ de fonctions continues

1) Limite et continuité

a) - Th de la double limite :
Si $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b[$ et s'il existe $\lambda_n = \lim_b f_n$, alors $\lim_b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n$.

- Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv uniformément (sur tout segment de I) et si les f_n continues, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.

b) Toute série normalement convergente sur I converge uniformément sur I.

Exemple de convergence uniforme sans cv normale : $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

c) *Exemple* : $\sum_{n\ge1} \dfrac{1}{xn^2+n}$ converge normalement sur tout $[a,+\infty[$, avec $a>0$.

En posant $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{xn^2+n}$, on a donc f continue sur $]0,+\infty[$.

En comparant $f(x)$ à $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{xt^2+t} = \int_1^{+\infty} \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{x}{1+xt}\right) dt = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$, on obtient $f(x) \sim -\ln(x)$ en $x = 0^+$.

2) Dérivation terme à terme d'une série de fonctions $\sum f_n$ convergeant vers f

a) Les f_n sont C^1, et $\sum f_n'$ converge uniformément sur (tout segment de) I. Alors f est C^1 et $f' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Remarque : De plus, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformément sur tout segment de I.

b) Les f_n sont C^∞, et les $\sum f_n^{(p)}$ cv uniformément sur tout segment de I pour $p \ge 1$ (ou p assez grand).
Alors f est C^∞ et $f^{(p)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)}$.

Remarque : On utilise souvent la convergence normale (pour justifier la convergence uniforme).

Exemple : Séries entières : si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, cv normale des séries dérivées sur tout segment $[-\rho,\rho] \subset]-R,R[$.

c) Les f_n sont C^p, $\sum f_n^{(p)}$ cv uniformément sur tout segment de I, et les $\sum f_n^{(k)}$ cv pour $k<p$. Alors f est C^p.

3) Intégrale d'une série de fonctions

a) Si les f_n continues et $\sum f_n$ cv uniformément sur *le segment* $[a,b]$, alors $\int_a^b f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n$.

C'est notamment le cas si la convergence est normale, c'est-à-dire si $\sum \sup_{[a,b]} |f_n|$ converge.

Exemple : Si $\sum a_n$ converge absolument, alors $\phi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{int}$ est continue et $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(t) e^{-int}\, dt$.

b) **Théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions** (continues par morceaux) :

Si $f = \sum f_n$ est continue (par morceaux) et si $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n|$ converge, alors $\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.

Exemple : $\int_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n}\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}\left(1 - 2\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{\pi^2}{12}$.

Important : On est souvent amené à utiliser la cv uniforme locale pour justifier la continuité de f.

c) *Remarque culturelle* : Théorème de cv monotone : supposons les f_n et $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ continues.
Si les f_n sont *positives*, on a toujours $\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$: en particulier, l'un cv ssi l'autre cv.
En effet, si $\sum \int_I f_n$ cv, alors $\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$ par le théorème ITT.
Et si l'intégrale $\int_I f$ converge, on utilise le th de cv dominée appliqué aux sommes partielles :
$S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ donne le résultat, car $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n = \lim_{n\to+\infty} \int_I S_n$ avec la domination : $0 \le S_n \le f$.

C. Intégrales dépendant d'un paramètre

1) Théorème de convergence dominée pour un paramètre continu

a) On considère $\boxed{g(x) = \int_I f(x,t)\, dt}$ avec $x \to a$.

On suppose que $\forall t \in I$, $\lim_{x\to a} f(x,t) = \lambda(t)$, et que les $t \longmapsto f(x,t)$ et $t \longmapsto \lambda(t)$ sont continues par morceaux.

Hypothèse de domination : Il existe un voisinage V de a (dans A) tel que $\forall x \in V$, $\forall t \in I$, $|f(x,t)| \le \varphi(t)$, avec $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable.

Alors $\lim_{x\to a} g(x) = \int_I \lambda(t)\, dt$

Remarque : Vu le th de continuité, cette propriété ne sert généralement que dans le cas où $a = +\infty$.

b) **Continuité** de g : Pour prouver g C^0, on utilise la domination uniforme par rapport au paramètre $x \in A$ sur tout segment V de A : on a $\forall x \in V$, $\forall t \in I$, $|f(x,t)| \le \varphi(t)$, avec $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable.

On suppose aussi la continuité des $x \longmapsto f(x,t)$, et la continuité par morceaux (et l'intégrabilité) des $t \longmapsto f(x,t)$.

Exemple : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$. On a $\forall x \in [a,b] \subset]0,+\infty[$, $\left|t^{x-1}e^{-t}\right| \le \varphi(t)$, avec $\varphi(t) = \begin{cases} t^{a-1}e^{-t} \text{ si } t \le 1 \\ t^{b-1}e^{-t} \text{ si } t > 1 \end{cases}$

Exemple : Si $f : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$ $(x,t) \longmapsto f(x,t)$ est continue, $g : x \longmapsto \int_0^1 f(x,t)\, dt$ est continue.

En effet, pour tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, on a $\forall x \in [a,b]$, $\forall t \in [0,1]$, $|f(x,t)| \le \sup_{(x,t)\in[a,b]\times[0,1]} |f(x,t)| = \varphi(t)$ intégrable sur $[0,1]$.

2) Dérivabilité

a) Pour prouver que g est C^1 :

- Pour tout t, les fonctions $x \longmapsto f(x,t)$ sont de classe C^1
- Pour tout x, les fonctions $t \longmapsto f(x,t)$ et $t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont continues (par morceaux) et intégrables
- Domination : Pour tout $[a,b] \subset A$, il existe $\varphi : I \longmapsto \mathbb{R}$ intégrable telle que $\forall x \in [a,b]$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \le \varphi(t)$.

Exemple : $f(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-tx} - e^{-t}}{t}\, dt$.

On a $\forall x > 0$, $f'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\, dt$ (domination de e^{-tx} par e^{-ta} sur $[a,+\infty[$, où $a > 0$ arbitraire).

b) Pour prouver g C^p, avec $p \ge 1$:

- Pour tout t, les fonctions $x \longmapsto f(x,t)$ sont de classe C^p
- Pour tout x et $k \le p$, les fonctions $t \longmapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ sont continues (par morceaux) et intégrables
- L'hypothèse de domination porte uniquement sur la dérivée $\frac{\partial^p f}{\partial x^p}$.