Révision n°3. Corrigé

A.1) a) Considérons la fonction $f : t \longmapsto (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}$.

f est intégrable sur $]0,1]$ car en $t=0$, $f(t) \sim (\ln t)^n t^{x-1} = O(t^{\varepsilon -1})$, avec $\varepsilon = \frac{1}{2}x > 0$.

f est intégrable sur $[1,+\infty[$ car $f(t) = O_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$.

b) Posons $g(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$.

- Pour tout t, l'application $x \longmapsto g(x,t)$ de classe C^∞ et $\dfrac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t) = (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x > 0$, l'application $t \longmapsto \dfrac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t)$ est par a) intégrable sur $]0,+\infty[$.
- De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$,

$$\forall t > 0,\ \left|\frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t)\right| \leq \varphi_n(t), \text{ où } \varphi_n(t) = \begin{cases} |\ln t|^n\, t^{a-1}e^{-t} \text{ si } t \in]0,1] \\ (\ln t)^n t^{b-1} e^{-t} \text{ si } t > 1 \end{cases}$$

Par a), φ_n est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$, donc sur $]0,+\infty[$.

On en déduit par le th sur les intégrales paramétrées que $\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} g(x,t)\, dt$ est de classe C^∞.

A.2) Avec le changement de variable $u = \alpha t$, $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\alpha t}\, dt = \dfrac{1}{\alpha^n} \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u}\, du = \dfrac{\Gamma(x)}{\alpha^n}$.

B.1) Il suffit de donner des équivalents en 0 et en 1 permettant de comparer avec les intégrales de Riemann.

On a en effet $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim_0 t^{x-1}$ et $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim_1 (1-t)^{y-1}$.

B.2) On utilise le changement de variable $t = 1-u$. On a $dt = -du$.

Donc $\beta(x,y) = \int_1^0 (1-u)^{x-1} u^{y-1}(-du) = \int_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1} du = \beta(y,x)$.

B.3) Par une IPP sur $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ et en faisant tendre ε vers 0^+, on obtient : $\beta(x+1,y) = \dfrac{x}{y+1}\beta(x,y+1)$.

Une IPP permet ainsi de relier $\beta(x+1,y)$ et $\beta(x,y+1)$, relation *où la valeur de la somme des deux arguments est conservée. Des IPP ne peuvent pas suffire. Il faut donc trouver un argument supplémentaire.*

L'idée est de noter que $t + (1-t) = 1$, ce qui permet d'obtenir $\beta(x,y) = \beta(x+1,y) + \beta(x,y+1)$.

Donc $\beta(x+1,y) = \dfrac{x}{y+1}(\beta(x,y) - \beta(x+1,y))$, donc $\beta(x+1,y) = \dfrac{x}{x+y+1}\beta(x,y)$.

B.4) Il suffit d'appliquer deux fois la relation du 3) combinée avec 2) :

$$\beta(x,y) = \beta(x+1,y+1) = \frac{x}{x+y+1}\beta(x,y+1) = \frac{x}{x+y+1}\frac{y}{x+y}\beta(x,y).$$

C.1) Il faut bien préciser l'argument qui utilise les relations fonctionnelles sur β et sur Γ.

C.2) Noter au passage que $t = \frac{u}{1+u} = 1 - \frac{1}{1+u}$, donc $dt = \frac{1}{(1+u)^2}\, du$ directement.

C.3) La fonction intégrée étant positive, la primitive $F_{x,y}$ est croissante sur $[0,+\infty[$.

Donc $F_{x,y}(t) \leq \lim_{+\infty} F_{x,y} = \Gamma(x+y)$.

C.4) Il faut utiliser le théorème de continuité des intégrales paramétrées.

On pose $g(u,a) = \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}((1+u)a)$, fonction continue en a, et on a la domination :

$\forall a \in [0,+\infty[$, $\forall u \in]0,+\infty[$, $|g(u,a)| \leq \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \Gamma(x+y) = \varphi(u)$ indépendant de a.

Et φ est intégrable sur $]0,+\infty[$ directement par la relation obtenue au C.2).

D'où l'existence et la continuité de G.

C.5) On applique le théorème de convergence dominée (avec la même fonction de domination φ qu'à la question précédente). En toute rigueur, on doit considérer une suite arbitraire $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$, et déduire du th de convergence dominée que

$$\lim_{n\to+\infty} G(a_n) = \Gamma(x+y) \int_0^{+\infty} \varphi(u)\ du = \Gamma(x+y)\beta(x,y)$$

C.6) Il faut utiliser le théorème de dérivation des intégrales paramétrées.

Avec les notations de 4), on a $a \longmapsto g(u,a)$ de classe C^1, et $\frac{\partial g}{\partial a}(u,a) = u^{x-1} a^{x+y-1} e^{-(1+u)a}$.

On doit se placer sur un segment $[\alpha,\beta] \subset]0,+\infty[$.

On a $\forall a \in [\alpha,\beta]$, $\forall u \in]0,+\infty[$, $0 \leq \left|\frac{\partial g}{\partial a}(u,a)\right| \leq u^{x-1}\beta^{x+y-1}e^{-(1+u)\alpha} = \psi(u)$ en notant que $x+y \geq 1$.

Et ψ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car $\alpha > 0$.

C.7) Par C.6), $G'(a) = a^y e^{-a} \int_0^{+\infty} (ua)^{x-1} e^{-ua}\ du$.

Donc $G'(a) = e^{-a} a^{y-1} \Gamma(x)$ par A.2) (ou le changement de variable $v = ua$).

C.8) On a $G(0) = 0$, donc $\Gamma(x+y)\beta(x,y) = G(+\infty) = \int_0^{+\infty} G'(a)\ da = \int_0^{+\infty} e^{-a} a^{y-1} \Gamma(x)\ da = \Gamma(x)\Gamma(y)$.