

Problème. Fonction β d'Euler (extrait de Centrale MP 2015)

A. La fonction Γ

A.1)

a) [1.5 pt] Soient $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $t \mapsto (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On note Γ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

b) [2.5 pts] Montrer que Γ est de classe C^∞ .

Pour la suite, on rappelle (propriété supposée connue ici) que $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

A.2) [1 pt] Soient $x > 0$ et $\alpha > 0$. Donner la valeur de $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\alpha t} dt$ en fonction de $\Gamma(x)$ et α^x .

B. Equation fonctionnelle de la fonction β

Pour $x > 0$ et $y > 0$, on pose $\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$.

B.1) [1 pt] Justifier l'existence de $\beta(x, y)$ pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$.

B.2) [1 pt] Montrer que $\beta(x, y) = \beta(y, x)$ pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$.

B.3) [2 pts] Soient $x > 0$ et $y > 0$. Etablir que $\beta(x+1, y) = \frac{x}{x+y} \beta(x, y)$.

B.4) [1 pt] En déduire que pour $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x+1, y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)} \beta(x, y)$.

C. Relation entre la fonction β et la fonction Γ

On veut montrer que pour $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, relation qui sera notée (\mathcal{R}) .

C.1) [1 pt] Expliquer pourquoi il suffit de prouver la relation pour $x > 1$ et $y > 1$.

Dans toute la suite, on suppose $x > 1$ et $y > 1$.

C.2) [1.5 pt] En utilisant le changement de variable $t = \frac{u}{1+u}$, montrer que

$$\beta(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du$$

C.3) [1 pt] On note $F_{x,y}$ la primitive sur $]0, +\infty[$ de $t \mapsto e^{-t} t^{x+y-1}$ qui s'annule en 0. Montrer que

$$\forall t > 0, \quad F_{x,y}(t) \leq \Gamma(x+y)$$

C.4) [2 pts] On pose $G(a) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}((1+u)a) du$.

Montrer que G est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

C.5) [1 pt] Montrer que $\lim_{a \rightarrow +\infty} G(a) = \Gamma(x+y)\beta(x, y)$.

C.6) [1.5 pt] Montrer que G de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

C.7) [1 pt] Pour $a > 0$, exprimer $G'(a)$ en fonction de $\Gamma(x)$, e^{-a} et a^{y-1} .

C.8) [1 pt] Dédurre de ce qui précède la relation (\mathcal{R}) .