Révision n°1. Corrigé

Partie A

1) a) *Remarque (non indispensable)* : Toute fonction continue sur $]0, +\infty[$ et convergeant en 0^+ et en $+\infty$ est nécessairement bornée. D'où l'existence des bornes sup.

- On applique l'inégalité des accroissement finis : $\forall t \geq 0,\ 1 - \cos t \leq t\ \sup(|\cos'|) = t$.

Ainsi $\forall t > 0,\ \left(\dfrac{1 - \cos t}{t}\right) \leq 1$. Donc $\sup_{t>0} \left(\dfrac{1 - \cos t}{t}\right)$ existe et est ≤ 1.

- On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 : $\forall t \geq 0,\ \ 1 - \cos t \leq \frac{1}{2}t^2\ \sup(|\cos''|) = \frac{1}{2}t^2$.
Ainsi $\forall t > 0,\ \left(\dfrac{1 - \cos t}{t^2}\right) \leq \dfrac{1}{2}$. Comme $\lim_{t \to 0} \left(\dfrac{1 - \cos t}{t^2}\right) = \dfrac{1}{2}$, alors $\dfrac{1}{2}$ est la borne sup.

b) On pose $\forall x \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[,\ g(x,t) = \dfrac{1 - \cos t}{t^2}\ e^{-xt}$.

- Pour tout $t > 0$, l'application $x \longmapsto g(x,t)$ est continue.

- On a $1 - \cos t \sim \frac{1}{2}t^2$ en $t = 0$ et $1 - \cos t = O_{+\infty}(1)$. Donc $g(x,t) \sim_{t=0} \frac{1}{2}$ et $g(x,t) = O_{t=+\infty}(e^{-xt})$.

Pour tout $x \geq 0$, $t \longmapsto g(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

- Propriété de domination : $\forall x \in [0, +\infty[,\ |g(x,t)| \leq \varphi(t) = \frac{1 - \cos t}{t^2}$ qui est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On en déduit que f est continue sur $[0, +\infty[$.

c) - Pour tout $t > 0$, l'application $x \longmapsto g(x,t)$ est de classe C^∞, et

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\frac{1 - \cos t}{t}\ e^{-xt} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = (1 - \cos t)\ e^{-xt}$$

- Pour tout $x > 0$, $t \longmapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ et $t \longmapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ sont intégrables sur $]0, +\infty[$.

- **Propriété de domination (sur la dernière dérivée)** : Pour $a > 0$, on a $\forall x \in [a, +\infty[$,

$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq \varphi_2(t) = 2e^{-at} \text{ qui est intégrable sur }]0, +\infty[$$

On en déduit que f est de classe C^2 sur $[0, +\infty[$, et que $\forall x > 0,\ f''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos t)e^{-xt}$.
Or, $\int_0^{+\infty} (1 - e^{it})e^{-xt}\ dt = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x - i}$, donc $f''(x) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x - i}\right) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1 + x^2}$.

d) On pourrait utiliser la convergence dominée. Mais une majoration directe convient et on conclut par pincement :

$|f(x)| \leq \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{2} e^{-xt}\ dt = \dfrac{1}{2x}$ et $|f'(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}\ dt \leq \dfrac{1}{x}$.

e) $\int \ln x = x \ln x - x + K$ et $\int \ln(x^2 + 1)\ dx = x \ln(x^2 + 1) - 2 \int \dfrac{x^2}{x^2 + 1}\ dx$.

Comme $\dfrac{x^2}{x^2 + 1} = 1 - \dfrac{1}{x^2 + 1}$, on obtient $\int \ln(x^2 + 1)\ dx = x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \arctan x + K$.

2) a) On sait par 1) b) que f est continue en 0.

b) La fonction $\phi : s \longmapsto \int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos(st)}{t^2}\ dt$ est paire, car cos est paire. On a bien $\phi(0)=0$.

Il en de même de la fonction $s \longmapsto |s|$. Il suffit donc de considérer le cas $\boxed{s>0}$.

On effectue le changement de variable $u = st$. On a : $\phi(s) = s\dfrac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos(u)}{u^2}\ du = s$. D'où le résultat.

3) On considère $\operatorname{Im} S \subset \{s_n, n\in\mathbb{N}\}$. On pose $a_n = P(S=s_n)$.

On a $E(|S|) = \sum_{n=0}^{+\infty} |s_n|\, a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos(s_n t)}{t^2}\ dt$

On considère la série de fonctions $F :]0,+\infty[\to \mathbb{R}\ \ t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(t)$, où $F_n(t) = \dfrac{1-\cos(s_n t)}{t^2}$.

La série de fonctions converge normalement sur tout segment de $]0,+\infty[$, donc Fest continue.

De plus, on a bien $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} |F_n(t)|\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} F_n(t)\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} |s_n|\, a_n < +\infty$.

On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions.

Donc $E(|S|) = \int_0^{+\infty} F(t)\ dt$, et donc $= \int_0^{+\infty} \dfrac{1-E(\cos(St))}{t^2}\ dt$ par le théorème du transfert.

4) a) On a $\cos(T+X) = \cos T\cos X - \sin T \sin X$. Comme T et X sont indépendantes, on obtient :

$E(\cos(T+X)) = E(\cos T)E(\cos X) - E(\sin T)E(\sin X)$.

Comme X et $-X$ ont même loi, il en est de même de $\sin X$ et de $\sin(-X) = -\sin(X)$.

Donc a fortiori, $E(\sin X) = E(-\sin X)$,c'est-à-dire $E(\sin X) = 0$. D'où le résultat.

b) Par a) appliqué aux variables tS_{k-1} et à tX_k, on a $E(\cos(tS_k)) = E(\cos(tS_{k-1}))E(\cos(tX_k))$.

Mais $E(\cos(tX_k)) = \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\cos(-t) = \cos t$.

Par récurrence, on obtient $E(\cos(S_n t)) = (\cos t)^n$. D'où par 3) : $E(|S_n|) = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \dfrac{1-(\cos t)^n}{t^2}\ dt$.

Partie B

1) *Remarque* : L'idée est la suivante : $E(|S+X| \mid S=k) = \frac{1}{2}|k-1| + \frac{1}{2}|k+1| = \begin{cases} |k| \text{ si } k\in\mathbb{Z}^* \\ 1 \text{ si } k=0 \end{cases}$

Et $E(|S+X|) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} E(|S+X| \mid S=k)P(S=k)$ ... mais la notion d'espérance conditionnelle est HP ...

On a $E(|S+X|) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|\, P(S+X=k)$.

Or, $P(S+X=k) = \frac{1}{2}P(S+X=k \mid X=1) + \frac{1}{2}P(S+X=k \mid X=-1)$,

c'est-à-dire $P(S+T=k) = \frac{1}{2}P(S=k-1) + \frac{1}{2}P(S=k+1)$.

Donc $E(|S+X|) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|\, P(S=k-1) + \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|\, P(S=k+1)$.

d'où $E(|S+X|) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k+1|\, P(S=k) + \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k-1|\, P(S=k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2}(|k+1|+|k-1|)P(S=k)$.

Or, $\frac{1}{2}(|k+1|+|k-1|) = \begin{cases} |k| \text{ si } k\in\mathbb{Z}^* \\ 1 \text{ si } k=0 \end{cases}$

Donc $E(|S+X|) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |k|\, P(S=k) + P(S=0) = E(|S|) + P(S=0)$.

2) Par 1) et par récurrence, $E(|S_n|) = E(|S_0|) + \sum_{k=0}^{n} P(S_k=0) = \sum_{k=0}^{n} P(S_k=0)$ car $S_0 = 0$.

Or, $P(S_n = 0) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{n/2} = a_{n/2}$ si n est pair, et $P(S_n = 0) = 0$ si n est impair.

Donc $E(|S_n|) = \sum_{k=1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} a_k = A_{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}$.

Partie C

1) Posons $g(u) = 1-(1-u)^n$. On a $g'(u) = n(1-u)^{n-1} \leq n$ pour tout $u \in [0,1]$.

On a $g(0) = 0$ et $\sup_{[0,1]} g' \leq n$. Par l'inégalité des accroissements finis, on a donc $\forall u \in [0,1]$, $g(u) \leq nu$.

Par Taylor-Lagrange, $u = 1 - \cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{x^2}{2n}$. Lorsque $x \in [0,1]$, $u = 1-\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \in [0,1]$.

On conclut : Pour $x \in [0,1]$, $1 - \cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n = g\left(1-\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right) \leq n\frac{x^2}{2n} = \frac{x^2}{2}$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_n}{\sqrt{n}} = \int_0^{+\infty} F_n(x)\ dx$, où $F_n(x) = \frac{1-\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n}{x^2}$.

- On a $\left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{x^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \to e^{-x^2/2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Donc $\forall x > 0$, $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \frac{1-e^{-x^2/2}}{x^2}$.

- Propriété de domination : $F_n(x) \leq \varphi(x) = \begin{cases} 1/2 \text{ si } x \in]0,1] \\ 2/x^2 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

φ est intégrable. Par convergence dominée, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} F_n(x)\ dx = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x^2/2}}{x^2}\ dx = L$.

3) Par IPP, on a : pour tous $0 < a < A$, $\int_a^A \frac{1-e^{-x^2/2}}{x^2} = \left[\frac{1-e^{-x^2/2}}{x}\right]_a^A + \int_a^A e^{-x^2/2}dx$.

Avec $a \to 0^+$ et $A \to +\infty$, on obtient $L = \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\ dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

D'où $u_n \sim \sqrt{\frac{\pi n}{2}}$ et $E(|S_n|) = \frac{2}{\pi} u_n \sim \sqrt{\frac{\pi n}{2}}$.

4) On a $X_k = 2Y_n - 1$, où Y_n suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

Donc $S_n = 2R_n - n$, où R_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.

Donc $P(S_n = 2k - n = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$, pour tout $k[\![0,n]\!]$.

On en conclut $E(|S_n|) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n |n-2k| \binom{n}{k}$, donc

$$\omega_n = \sum_{k=0}^{n} |n-2k| \binom{n}{k} \sim 2^n \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

Partie D

1) On sait par le cours (méthode de l'équation différentielle) que $g : x \longmapsto \frac{1}{(1-x)^\beta}$ est DSE sur $]-1,1[$.

On a aussi par Taylor $c_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\beta(\beta+1)...(\beta+n-1)}{n!}$.

2) a) En prenant $\beta = \frac{1}{2}$, on a $c_n = \frac{1 \times 3 \times 5 ... (2n-1)}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} = a_n$.

3) a) $\sum A_n x^n$ est le produit de Cauchy de $\sum a_n x^n$ et de $\sum x^n$, qui ont 1 comme rayon de convergence.

Donc pour $|x| < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\dfrac{1}{(1-x)} = \dfrac{1}{(1-x)^{3/2}}$.

b) Par 2), $A_n = \dfrac{3 \times 5 ... (2n+1)}{2^n n!} = (2n+1)a_n$.

4) Par la partie B, on a $E(|S_n|) = A_{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}$, donc $E(|S_n|) = \left(2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1\right) a_{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \sim n a_{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}$.

Or, $a_{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi \lfloor (n-1)/2 \rfloor}} \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi n}}$, donc on retrouve $E(|S_n|) \sim n\sqrt{\dfrac{2}{\pi n}} = \sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}$.

Exercice A. Polynômes de Laguerre

1) Si $P = \lambda X^k + ...$, on a $f(P) = \alpha k X^{k-1} + ...$ Donc $\deg f(P) \leq \deg P$.

Donc E_n est stable par f, ce qui permet de définir la restriction f_n de f à E_n.

La matrice de f_n dans la base $(1, x, x^2, ..., x^n)$ est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $(0, \alpha, 2\alpha, ..., n\alpha)$.

2) a) On a $\omega'(t) = \dfrac{\alpha t + \beta - 1}{t} = \alpha + \dfrac{\beta - 1}{t}$. Donc $\omega(t) = k e^{\alpha t} t^{(\beta-1)}$, avec $k > 0$.

b) L'intégrale est doublement impropre en 0 et en $+\infty$. On a $R(t) = O(1)$ en $t = 0$ et $R(t) = O_{+\infty}(t^m)$ où $m = \deg R$.

$\omega(t)\ R(t) = O(t^{(\beta-1)})$ et donc $\int_0^1 R(t)\ \omega(t)\ dt$ converge absolument par comparaison avec l'intégrale de Riemann.

Comme $\alpha < 0$, $\omega(t)\ R(t) = O_{+\infty}(t^{-2})$, donc par comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty} R(t)\ \omega(t)\ dt$ converge absolument.

3) Soient P et $Q \in E_n$. On a $P(t)Q(t)\omega(t) = O(\omega(t))$ en 0^+ et $P(t)Q(t)\omega(t) = O_{+\infty}(t^{2n}\ \omega(t))$.

Par 2) b), $\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\ \omega(t)\ dt$ est donc convergente. La bilinéarité et la symétrie de $\langle\ ,\ \rangle$ sont évidentes.

D'autre part, comme $\omega > 0$, $\langle P, P\rangle \geq 0$, et $\langle P, P\rangle = 0$ ssi $\forall t \in]0, +\infty[$, $P(t)^2 = 0$, donc ssi $P = 0$ (polynôme nul).

On a $\langle f(P), Q\rangle = \int_0^{+\infty} (aP'' + bP')\ Q\ \omega = \int_0^{+\infty} P''Q\ a\omega + \int_0^{+\infty} P'Q\ b\omega$.

En intégrant par parties sur $[\varepsilon, A]$, on a $\int_\varepsilon^A aP''Q\ \omega = [P'(aQ\omega)]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A P'(aQ\omega)'$.

Compte tenu de 2) b), on a $[P'(aQ\omega)]_0^{+\infty} = 0$. Donc $\int_0^{+\infty} aP''Q\ \omega = -\int_0^{+\infty} P'(aQ\omega)'$.

D'autre part, on a $\int_0^{+\infty} P'(aQ\omega)' = \int_0^{+\infty} P'Q'(a\omega) + \int_0^{+\infty} P'Q(a\omega)'$.

Or, on a $(a\omega)' = a'\omega + a\omega' = b\omega$, donc $\int_0^{+\infty} P'(aQ\omega)' = \int_0^{+\infty} P'Q'(a\omega) + \int_0^{+\infty} P'Q\ b\omega$.

On en conclut que $\int_0^{+\infty} aP''Q\ \omega = -\int_0^{+\infty} P'Q'(a\omega)$.

4) a) On déduit de 3) b) que $\langle f(P), Q\rangle = \langle P, f(Q)\rangle$, c'est-à-dire f est symétrique.

D'autre part E_n est stable par f, donc on peut considérer la restriction f_n de f à E_n. Ainsi, f_n est symétrique.

Par le cours, tout endomorphisme symétrique en dimension finie admet une BON de vecteurs propres.

Les vecteurs propres, qui sont ici des polynômes, ne peuvent être tous de degré $< n$, car sinon la famille ne serait pas génératrice Donc f admet un moins un vecteur propre de degré n.

En le divisant par son coefficient dominant, on obtient le vecteur propre B_n cherché.

La valeur propre cherchée est $\lambda_n = \alpha n$ par la question 1).

b) La famille de vecteurs propres $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite est bien de degrés échelonnés, etcomme les valeurs propres λ_k sont distinctes, alors elle est orthogonale (car les sev propres d'un endomorphisme symétrique sont orthogonaux et plus précisement en somme directe orthogonale).

Remarque : $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la base orthogonale obtenue en appliquant à la base canonique $(x^k)_{0\leq k\leq n}$ le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

5) a) Le coefficient en t^n de ψ est $d_n = -nc_n + n(n+1)c_{n+1} + (n+1)c_{n+1} - nc_n = (n+1)^2c_{n+1} - nc_n$.

b) Deux séries entières coïncident (sur un voisinage de 0) ssi elles ont les mêmes coefficients.

On a $\psi = \lambda\varphi$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \dfrac{\lambda+n}{(n+1)^2}c_n$, donc ssi $c_n = \dfrac{c_0}{(n!)^2}\prod_{k=0}^{n-1}(\lambda+k)$.

Le rayon de convergence de la série entière ainsi définie est toujours $R = +\infty$:

- par le critère de d'Alembert lorsque λ n'appartient pas à $\mathbb{Z}^-$

- lorsque $\lambda \in \mathbb{Z}^-$, les solutions sont polynomiales.

On en déduit que tout réel λ est valeur propre et que le sev propre E_λ est une droite vectorielle.

6) a) Par Leibniz, $\dfrac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\dfrac{n!}{k!}x^k(-1)^ke^{-x}$.

Donc $L_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\dfrac{n!}{k!}(-1)^{n-k}x^k$, polynôme de degré n et unitaire.

b) Comme L_n est de degré n et unitaire, il suffit de prouver que $\langle L_n, Q\rangle = 0$ pour tout $Q \in E_{n-1}$.

On a $\langle L_n, Q\rangle = \int_0^{+\infty} L_n(t)Q(t)\ e^{-t}\ dt = (-1)^n\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t)Q(t)\ dt$, où $g(t) = t^ne^{-t}$.

En intégrant n fois par parties, on obtient : $\langle L_n, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}[g^{(n-k-1)}(t)Q^{(k)}(t)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} g(t)Q^{(n)}(t)\ dt$.

Il suffit pour conclure de justifier que tous les termes du second membre sont nuls.

Comme $\deg Q < n$, alors $Q^{(n)} = 0$, donc $\int_0^{+\infty} g(t)Q^{(n)}(t)\ dt = 0$.

D'autre part, pour tout $j < n$, $g^{(j)}(t)$ est de la forme $C_j(t)e^{-t}$, où C_j est un polynôme de degré n admettant 0 comme racine d'ordre $n-j$. Donc $g^{(j)}(0) = 0$ et $g^{(j)}(t) = O_{+\infty}(t^ne^{-t})$, d'où $[g^{(n-k-1)}(t)Q^{(k)}(t)]_0^{+\infty} = 0$.

Exercice B

1) a) $X'(t) = A(t)X(t)$ est un système différentiel linéaire d'ordre 1 résolu à coefficients continus.

Les deux colonnes de $M(t)$ en sont les solutions avec comme conditions intiales $(1,0)$ et $(0,1)$.

D'où l'existence et l'unicité de $t \longmapsto M(t)$ par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

b) Les colonnes de $M(t)$ forment un système fondamental de solutions de $X'(t) = A(t)X(t)$.

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $M(t)$ est inversible.

2) Supposons (i)**.** Considérons les applications $Q_1 : t \longmapsto M(t)M(s)$ et $Q_2 : t \longmapsto M(t+s)$.

Q_1 et Q_2 sont deux solutions de $\forall t \in \mathbb{R}$, $Q'(t) = AQ(t)$ et $Q(0) = M(s)$.

Donc par Cauchy-Lipschitz, $Q_1 = Q_2$.

Réciproquement, supposons (ii). En prenant $t = s = 0$, on a $M(0) = M(0)^2$, donc $M(0) = I_2$, car $M(0)$ est inversible.

En dérivant par rapport à s, on obtient $M'(t+s) = M'(t)M(s)$.

En prenant $s = 0$, on obtient $M'(s) = AM(s)$, avec $A = M'(0)$.

3) En posant $Q(t) = P^{-1}M(t)P$, on a $Q'(t) = (P^{-1}AP)Q(t)$ et $Q(0) = I_2$

Or, on sait qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ tel que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ ou $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Dans le premier cas, le système $\begin{cases} x'(t) = \lambda x(t) \\ y'(t) = \mu y(t) \end{cases}$ et $\begin{cases} x(0) = \alpha \\ y(0) = \beta \end{cases}$ a pour solution $\begin{cases} x(t) = \alpha e^{\lambda t} \\ y(t) = \beta e^{\mu t} \end{cases}$

En prenant $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ et $(0, 1)$, on obtient bien $Q(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}$.

Dans le second cas, $\begin{cases} x'(t) = \lambda x(t) + y(t) \\ y'(t) = \lambda y(t) \end{cases}$ et $\begin{cases} x(0) = \alpha \\ y(0) = \beta \end{cases}$ a pour solution $\begin{cases} x(t) = \alpha e^{\lambda t} + \beta t e^{\lambda t} \\ y(t) = \beta e^{\lambda t} \end{cases}$.

En prenant $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ et $(0, 1)$, on obtient bien $Q(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$.

4) a) On intègre la relation par rapport à t sur $[0, t]$.

On obtient $Q(t+s) - Q(s) = \int_0^t M(\theta + s)\, d\theta = \int_0^t M(\theta) M(s)\, d\theta$.

On sait que pour toute application linéaire L, on a $L\left(\int_0^t S(\theta)\, d\theta\right) = \int_0^t L(S(\theta))\, d\theta$.

Donc $\int_0^t M(\theta)M(s)\, d\theta = \left(\int_0^t M(\theta)\, d\theta\right)\ M(s) = Q(t)M(s)$.

b) On a $\lim_{t\to 0, t>0} \dfrac{Q(t)}{t} = \lim_{t\to 0, t>0} \dfrac{Q(t) - Q(0)}{t} = Q'(0) = M(0) \in GL_2(\mathbb{C})$.

c) Comme $GL_2(\mathbb{C})$ est ouvert, alors il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in]0, \alpha]$, $\dfrac{Q(t)}{t} \in GL_2(\mathbb{R})$, donc $Q(t) \in GL_2(\mathbb{R})$.

d) On fixe $t > 0$ tel que $Q(t) \in GL_2(\mathbb{C})$. On a alors $M(s) = Q(t)^{-1}(Q(t+s) - Q(s))$.

Or, $Q : t \longmapsto \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$ est C^1 et il est de même de $Q^{-1} : t \longmapsto \dfrac{1}{a(t)d(t) - b(t)c(t)} \begin{pmatrix} d(t) & -b(t) \\ -c(t) & a(t) \end{pmatrix}$.

5) On considère $M : \mathbb{R} \to GL_2(\mathbb{C})\ \ t \longmapsto F(e^{it})$.

On a bien $M(t+s) = M(t)M(s)$, car $F(e^{i(t+s)}) = F(e^{it}e^{is})$.

M est continue comme composée de fonctions continues. Donc par 4), M est de classe C^1.

Donc on peut appliquer 3). Mais on a $\boxed{M(2\pi) = M(0) = I_2}$.

Donc le second cas est impossible, et dans le premier cas, on doit avoir $e^{2\pi\lambda} = 1$ et $e^{2\pi\mu} = 1$.

Donc λ et μ sont de la forme in et im, avec $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$.

Donc $F(e^{it}) = M(t) = P \begin{pmatrix} e^{int} & 0 \\ 0 & e^{imt} \end{pmatrix} P^{-1}$, c'est-à-dire $F(z) = P \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^m \end{pmatrix} P^{-1}$.

Exercice C. Représentations du groupe de Lorentz

1) a) Tout endomorphisme admet au moins un valeur propre (car E est un $\mathbb{C}$-ev et $\dim E \geq 1$).

donc $\mathrm{Sp}(u)$ est non vide et fini (de cardinal $\leq n$) donc u admet une valeur propre de partie réelle maximale.

b) On a $[u, w] = -2w$, donc $u \circ w(x_k) = -2w(x_k) + w(u(x_k))$, c'est-à-dire $u(x_{k+1}) = -2x_{k+1} + w(u(x_k))$.

On montre par récurrence sur k que $u(x_k) = (\lambda - 2k)x_k$. La propriété est vraie pour $k = 0$ car $u(x_0) = \lambda x_0$.

Si elle est vraie au rang k, alors $u(x_{k+1}) = -2x_{k+1} + w((\lambda - 2k)x_k) = (\lambda - 2k - 2)x_{k+1}$. D'où le résultat.

c) $u(v(x_0)) = (\lambda + 2)v(x_0)$. Par définition de λ, $\lambda + 2$ n'est pas valeur propre, donc $v(x_0) = 0$.

d) On a $v(x_{k+1}) = w(v(x_k)) + u(x_k)$. On montre $v(x_k) = k(\lambda + 1 - k)x_{k-1}$ par récurrence sur $k \in [\![1, n]\!]$.

La propriété est vraie pour $k = 0$, en posant $x_{-1} = \overrightarrow{0}$. Supposons la vraie an rang $k \in [\![0, n-1]\!]$.

$v(x_{k+1}) = w(v(x_k)) + u(x_k) = k(\lambda + 1 - k)x_k + (\lambda - 2k)x_k = (k+1)\lambda + (k - k^2 - 2k) = (k+1)(\lambda - k)x_k$.

$F = \text{Vect}(x_0, x_1, ..., x_{p-1})$ est stable par w, car $\forall k \leq p$, $w(x_{k-1}) = x_k \in F$.

Par b) et d), F est stable par u et v. Comme (u, v, w) est irréductible, $\boxed{F = E}$, c'est-à-dire $p = n$.

Les x_k, avec $0 \leq k < n$, sont des vecteurs propres de u associés à des valeurs propres distinctes.

On déduit de b) que nécessairement $x_k = \overrightarrow{0}$ pour tout $k \geq n$. En particulier, $x_n = \overrightarrow{0}$.

Or, x_{n-1} est non nul, donc la relation $v(x_n) = n(\lambda + 1 - n)x_{n-1}$ implique $\lambda = n - 1$.

2) Soit F un sev non nul de E stable par u, v et w. On veut montrer que $F = E$.

L'idée est de commencer par montrer que nécessairement $\boxed{x_0 \in F}$.

Considérons $y \in F$ non nul. Il existe un plus grand entier p tel que $v^p(y) \neq \overrightarrow{0}$.

En effet, v est nilpotent (car $\forall k$, $v^{n-1}(x_k) = 0$), donc $v^k(y) = \overrightarrow{0}$ pour k assez grand.

De plus, comme les μ_k ne sont pas nuls, alors $\text{Ker}\, v = \mathbb{C}x_0$.

Comme $v^{p+1}(y) = \overrightarrow{0}$., alors $v^p(y) \in \text{Ker}\, v$, donc $\mathbb{C}x_0 = \mathbb{C}v^p(y)$, et ainsi $x_0 \in F$ (car F stable par v).

Comme $x_k = w^k(x_0)$, alors $\forall k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, $x_k \in F$ (car F stable par w). Donc $F = E$.

Exercice E. Equation d'Euler-Lagrange

1) a) La forme est bien symétrique et bilinéaire.

De plus, on a $(f \mid f) = \int_0^1 f^2 + (f')^2 \geq 0$, avec égalité ssi f et f' nulles, donc a fortiori ssi f nulle.

b) Soient $(f, g) \in F \times G$. Alors $(f \mid g) = \int_0^1 fg + \int_0^1 f'g'$.

Or, par intégration par parties, on a $\int_0^1 f'g' = -\int_0^1 fg''$. Donc $(f \mid g) = \int_0^1 f(g - g'') = 0$.

Pour toute fonction $y \in E$, il existe $g \in G$ telle que $y(0) = g(0)$ et $y(1) = g(1)$.

On a en effet $G = \mathrm{Vect}(\mathrm{ch}, \mathrm{sh})$, et le système d'ordre 2 obtenu est inversible, car $\begin{vmatrix} \mathrm{ch}\, 0 & \mathrm{sh}\, 0 \\ \mathrm{ch}\, 1 & \mathrm{sh}\, 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Donc $F \oplus^\perp G = E$. La somme es directe car les sev sont orthogonaux.

c) On note tout d'abord que $J(h) = (h \mid h) \geq 0$, avec égalité ssi $h = 0$.

Avec $h = h_0 + f$, avec $f \in F$. Donc $J(h) = J(f_0 + f) + J(g_0)$, car $f_0 + f$ et g sont orthogonaux.

Donc $m = J(g_0)$ atteint lorsque $f = -f_0$.

d) On cherche $g_0 \in G$ tel que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. Alors $g(t) = \dfrac{\mathrm{sh}\, t}{\mathrm{sh}\, 1}$.

Donc $J(g) = \int_0^1 \left(\dfrac{\mathrm{sh}\, t}{\mathrm{sh}\, 1}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{ch}\, t}{\mathrm{sh}\, 1}\right)^2 dt = \int_0^1 \dfrac{\mathrm{ch}(2t)}{(\mathrm{sh}\, 1)^2}\, dt = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{sh}(2)}{(\mathrm{sh}\, 1)^2} = \dfrac{\mathrm{ch}\, 1}{\mathrm{sh}\, 1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{e^2 + 1}{e^2 - 1}$.

2) a) Les restrictions de g à $[0, a]$, $[a, b]$ et $[b, 1]$. sont des fonctions usuelles de classe C^∞.

De plus, g est C^1 en a et en b, car les dérivées à droite et à gauche en ces points sont nulles.

Donc g est de classe C^1 sur $[0, 1]$. On a $\int_0^1 g(t)\, dt = \int_a^b g(t)\, dt$.

Par deux IPP successives, on obtient $\int_a^b g(t)\, dt = \dfrac{1 \times 2}{3 \times 4} \int_a^b (t - a)^4\, dt = \dfrac{1 \times 2}{3 \times 4 \times 5}(b - a)^5 = \dfrac{(b - a)^5}{30}$.

b) Il existe x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$.

Par continuité, il existe un voisinage $[a, b]$ de x_0 tel que $\forall t \in [a, b]$, $f(t)$ est non nul et du signe de $f(x_0)$.

En considérant la focntion g définie au a), on a alors fg de signe constant non nul sur $]a, b[$, donc $\int_a^b fg \neq 0$.

3) a) i) implique ii) par 2), vu que l'application g définie au 2) appartient à G. Réciproque immédiate.

b) On peut approcher toute fonction $f \in E$ arbitrairement près pour $\|f\|_2$ en considérant ε assez petit et l'application g_ε définie par $g_\varepsilon(t) = f(t)L_\varepsilon(t)$, où L est la fonction affine par morceaux nulle en 0 et 1 et valant 1 sur $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$. En effet, on a alors $\|f\|_2 - \|g_\varepsilon(t)\|_2 \leq 2\varepsilon \sup |f|$.

c) Par une IPP, on a $\int_0^1 f_1(t)g(t) + f_2(t)g'(t)\, dt = \int_0^1 (f_1 - f_2')(t)g(t) = 0$. On applique alors b) à $f = f_1 - f_2'$.

4) a) $S(f + \varepsilon g) = \int_0^1 \mathcal{L}(t, f + \varepsilon g(t), f' + \varepsilon g'(t))\, dt$. Posons $F(t, \varepsilon) = \mathcal{L}(t, f + \varepsilon g(t), f' + \varepsilon g'(t))$.

On vérifie que les hypothèses de dérivation à intégrales à paramètre s'appliquent :

- F est continue par morceaux en t
- F de classe C^1 en ε, et $\dfrac{\partial F}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) = g(t)\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(t, f + \varepsilon g(t), f' + \varepsilon g'(t)) + g'(t)\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(t, f + \varepsilon g(t), f' + \varepsilon g'(t))$.

On peut considérer comme fonction de domination $\sup_{(t,\varepsilon) \in [0,1] \times K} \left|\dfrac{\partial F}{\partial \varepsilon}\right|$, où K segment de $\mathbb{R}$.

Donc $\varepsilon \longmapsto \int_0^1 F(t, \varepsilon)\, dt$ est de classe C^1, et sa dérivée en 0 vaut

$$\int_0^1 g(t)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(t, f(t), f'(t)) + g'(t)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(t, f(t), f'(t))\, dt.$$

Alors pour tout $g \in H$, $\varepsilon \longmapsto S(f+\varepsilon g)$ atteint un extremum en $\varepsilon = 0$, donc est de dérivée nulle.

Donc $\forall g \in G$, $\int_0^1 g\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(t,f,f') + g' \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(t,f,f') = 0$.

Il résulte de 3) appliqué à $f_1 = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(t,f,f')$ et $f_2 = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(t,f,f')$ que $f_1 - f_2' = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(t,f,f') - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(t,f,f')\right) = 0$$

5) a) *On prend ici* $\mathcal{L}(t,x,y) = x^2 + y^2$. On a $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(t,x,y) = 2x$ et $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(t,x,y) = 2y$.

L'équation d'Euler-Lagrange s'écrit : $2f - 2f'' = 0$, c'est-à-dire $f'' = f$.

b) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(t,x,y) = \frac{1}{2}my^2 - U(x)$. On a $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(t,x,y) = -U'(x)$ et $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(t,x,y) = my$.

L'équation d'Euler-Lagrange s'écrit : $-U'(\theta) - m(\theta')'$, d'où l'équation $\theta''(t) = -U'(\theta(t))$.

Exercice C. Calcul de l'intégrale de Gauss à l'aide d'une intégrale à paramètre

1) La fonction $h : (x,t) \longmapsto \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est de classe C^∞ sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$.

Les fonctions $t \longmapsto h(x,t)$ sont intégrables sur $[0,+\infty[$, car $h(x,t) \leq \dfrac{1}{1+t^2}$.

Pour tout $a > 0$, $\forall x \geq \alpha$, $\forall t \geq 0$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(t)\right| = -2xe^{-x^2(1+t^2)} \leq e^{-\alpha^2(1+t^2)} \leq e^{-\alpha^2 t^2} = \varphi(t)$ intégrable sur $[0,+\infty[$.

Comme $\alpha > 0$ est arbitraire, f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, et $f'(x) = -2x \int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+t^2)}\ dt$.

Mais on a ensuite $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2(1+t^2)}\ dt = e^{-x^2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}\ d(xt) = e^{-x^2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\ du = e^{-x^2}$.

Donc $\forall x > 0,\ f'(x) = -2e^{-x^2}G$.

2) a) On a $f(0) = \int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{1+t^2} = \dfrac{\pi}{2}$.

D'autre part, $\forall x \geq 0$, $\left(\forall t \in]0,+\infty[,\ 0 \leq \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2} = \varphi(t)\right)$, et φ intégrable sur $]0,+\infty[$.
Le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, on en déduit f continue sur $[0,+\infty[$.

b) $0 \leq f(x) \leq e^{-x^2} \int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{1+t^2} \leq \dfrac{\pi}{2}e^{-x^2}$. Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (par pincement).

Autre preuve : On a $\forall x \geq 0$, $\left(\forall t \in]0,+\infty[,\ 0 \leq \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2} = \varphi(t)\right)$, et φ intégrable sur $]0,+\infty[$.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, et en déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} 0 = 0$.

3) Comme f est continue sur $[0,+\infty[$ et C^1 sur $]0,+\infty[$, on a : $(\lim_{+\infty} f) - f(0) = \int_0^{+\infty} f'(x)\ dx$.

Or, $\int_0^{+\infty} f'(x)\ dx = -2G^2 2G^2 = \dfrac{\pi}{2}$, et comme $G > 0$, on obtient $G = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$.