Révision n°1. *Barème sur 23 pts. durée 2h30*

Distance à l'origine dans les marches aléatoires (*inspiré de Centrale MP 2015*)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

A.1) On pose $\boxed{f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\ e^{-xt}\ dt}$.

a) [2 pts] Justifier que $\sup_{t>0}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right) \leq 1$ et que $\sup_{t>0}\left(\frac{1-\cos t}{t^2}\right) = \frac{1}{2}$.

b) [2 pts] Montrer que f est définie et continue sur $[0,+\infty[$.

c) [2.5 pts] Montrer que f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$, et que $\forall x > 0,\ f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$.

d) [2 pts] Montrer que f et f' convergent vers 0 en $+\infty$.

e) [1.5 pt] Déterminer les primitives sur $]0,+\infty[$ des fonctions $x \longmapsto \ln x$ et $x \longmapsto \ln(x^2+1)$.

On en déduit (*admis ici*) que $\forall x > 0,\ f(x) = x\ln x - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \arctan x + \frac{\pi}{2}$.

A.2) a) [1 pt] Déduire de 1) que $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\ dt = \frac{\pi}{2}$.

b) [1.5 pt] Montrer que $\forall s \in \mathbb{R},\ \ |s| = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\ dt$.

A.3) [3.5 pts] Soit S une v.a. réelle d'espérance finie. Montrer que $\boxed{E(|S|) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-E(\cos(St))}{t^2}\ dt}$.

A.4) a) [1.5 pt] Soient T et X deux v.a. réelles indépendantes. On suppose que X et $-X$ ont même loi.

Montrer que $E(\cos(T+X)) = E(\cos T)E(\cos X)$.

b) [1.5 pt] On considère $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ où les X_k sont des variables i.i.d. de Rademacher.

Montrer que $\boxed{E(|S_n|) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos t)^n}{t^2}\ dt}$.

Partie B

B.1) [3 pts] Soit $\boxed{S : \Omega \to \mathbb{Z}}$ et $X : \Omega \to \{-1, 1\}$ deux variables aléatoires indépendantes.

On suppose que X suit la loi de Rademacher.

Montrer que $E(|S+X|) = E(|S|) + P(S=0)$.

B.2) [1 pt] On considère $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ où les X_k sont des variables i.i.d. de Rademacher.

Exprimer $E(|S_n|)$ en fonction d'une somme de la forme $A_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}$.

Les parties C et D complètent respectivement les parties A et B

Partie C

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{1-(\cos t)^n}{t^2}\, dt$.

C.1) (★) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$, $1 - \cos\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)^n \leq \dfrac{x^2}{2}$.

Indication : On pourra montrer et utiliser l'inégalité : $\forall u \in [0,1]$, $1-\ (1-u)^n \leq nu$.

C.2) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} = \int_0^{+\infty} \dfrac{1-e^{-x^2/2}}{x^2}\, dx$.

C.3) On donne $\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. Montrer à l'aide de la partie A que $E(|S_n|) \sim \sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}$.

C.4) En déduire un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de $\omega_n = \sum_{k=0}^{n} |n-2k| \binom{n}{k}$.

Partie D

D.1) On pose pour $|x| < 1$, $g(x) = \dfrac{1}{(1-x)^\beta}$.

On sait par le cours que g est DSE en 0 sur $]-1,1[$. On pose $\forall x \in]-1,1[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$.

Expliciter sans justification c_n en fonction de β.

D.2) a) On considère $\boxed{a_n = \dfrac{1}{4^n}\binom{2n}{n}}$. Montrer que pour $|x| < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

b) En utilisant la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$, proposer un équivalent simple de a_n.))

D.3) a) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k}$. Montrer que pour $|x| < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n = \dfrac{1}{(1-x)^{3/2}}$.

b) En déduire : $A_n = (2n+1)a_n$.

D.4) A l'aide de la partie B, retrouver $E(|S_n|) \sim \sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}$.

On considère $\forall x > 0$, $I(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{\exp(xt) - 1}\ x\ dt$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{nx - i}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{1 + n^2x^2}$.

a) Justifier l'existence $I(x)$ et $S(x)$, et montrer que $I(x) = S(x)$.

b) $\int_0^{+\infty} \dfrac{xdt}{1 + t^2x^2}$Montrer que $\lim_{x\to 0, x>0} S_n(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

c) Montrer que $I(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{1 - \cos(t)}{(\exp(xt) - 1)^2}\ x^2 \exp(xt)\ dt$.

d) ($\bigstar$) Montrer que $\lim_{x\to 0, x>0} I(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{1 - \cos(t)}{t^2}\ dt = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t}\ dt$.

On déduit des questions précédentes $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t}\ dt. = \dfrac{\pi}{2}$.