Extra

Exercice A

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. réelle d'espérance finie.

Pour tout réel $A \geq 0$, on pose $X_A = X.1_{|X|\leq A}$, c'est-à-dire $X_A(\omega) = \begin{cases} X(\omega) \text{ si } |X(\omega)| \leq A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

1) On suppose X à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = E(X)$.

2) On suppose X à valeurs réelles. Montrer que $\lim_{A\to+\infty} E(X_A) = E(X)$.

Indication : Utiliser $\operatorname{Im} X \subset \{x_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ et le théorème de la double limite sur les séries de fonctions.

Exercice B

Pour $X = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$, on pose $\|X\|^2 = X^T X = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Pour $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|A\|^2 = \operatorname{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$.

On montre aisément que pour toutes matrices orthogonales U et $V \in O_n(\mathbb{R})$, $\|UAV\| = \|A\|$.

Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive réelle, et on note $0 \leq \lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$ ses valeurs propres.

1) Soit $U \in O_n(\mathbb{R})$. On pose $D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Montrer qu'il existe $W \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\|A - U\| = \|DW - I_n\|$$

2) On pose $d = \inf_{U\in O_n(\mathbb{R})} \|A - U\|^2$. Montrer que $d = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - 1)^2$.

Exercice C

On dit qu'une matrice est bistochastique ssi $\begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{ij} \geq 0 \\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^n m_{ij} = 1 \\ \forall j \in [\![1,n]\!],\ \sum_{i=1}^n m_{ij} = 1 \end{cases}$

On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices bistochastiques.

Soient $X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $Y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. On considère $f : \mathcal{B}_n \to \mathbb{R} \quad M \longmapsto X^T MY$.

1) Vérifier que $\mathcal{B}_n$ est une partie fermée, bornée, non vide, convexe.

2) Montrer que si $U \in O_n(\mathbb{R})$, la matrice $M = (u_{ij}^2)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ appartient à $\mathcal{B}_n$.

3) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tels que $i \neq j$. On considère la matrice $P_{(i,j,k)} = E_{ii} + E_{ik} - E_{ji} - E_{jk}$.

Exprimer $X^T P_{(i,j,k)} Y$ en fonction de $(x_i - x_j)$ et de $(y_i - y_j)$.

4) Soit $M \in \mathcal{B}_n$ telle que $M \neq I_n$.

Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $i \neq j$ et $i \neq k$ tels que $M + \varepsilon P_{(i,j,k)} \in \mathcal{B}_n$.

5) On suppose $x_1 < ... < x_n$ et $y_1 < ... < y_n$. Montrer que $f(I_n) = \sup f$.

6) Soient $X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $Y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $x_1 \leq ... \leq x_n$ et $y_1 \leq ... \leq y_n$.

a) Montrer que $\forall M \in \mathcal{B}_n$, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_i y_j \leq \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

b) Montrer que pour toute permutation σ de $[\![1,n]\!]$, on a $\sum_{i=1}^n x_i y_{\sigma(i)} \leq \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

c) Soient X_0 et Y_0 deux v.a. de lois uniformes dans $\{x_1, ..., x_n\}$ et $\{y_1, ..., y_n\}$. Montrer que $E(X_0 Y_0) \leq \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i$.