Résumé du cours d'Algèbre

(1) **Division euclidienne**

- *Racines de l'unité* **:** Si $\omega = e^{2ik\pi/n}$, alors $\omega^k = \omega^r$ où $r = k$ modulo n. En particulier, $\omega^p = 1 \Leftrightarrow p \in n\mathbb{Z}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des racines n-ième de l'unité est $U_n = \{\omega^k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ $=\{\omega^k,\ 0 \leq k < n\}$.

- *Division euclidienne dans les polynômes* : Pour $A \in K[X]$ et B non nul, $A = BQ + R$, avec $\deg R < \deg B$.

Si $B = (X - a_1)(X - a_2)...(X - a_d)$, avec a_i distincts, alors R est défini par $R(a_i) = A(a_i)$: Interpolation de Lagrange.

- *Application aux polynômes de matrices* : Supposons B polynôme annulateur de A de degré d.

Alors $A^n = R_n(A)$, où R_n est le reste de la division euclidienne X^n par B. Ainsi, $A^n \in \mathrm{Vect}(I, A, A^2, ..., A^{d-1})$.

(2) **Dénombrement**

- Cardinal d'une réunion. Produit cartésien : $\mathrm{card}(E \times F) = (\mathrm{card}\, E)(\mathrm{card}\, F)$, $\mathrm{card}\, E^p = n^p$, où $n = \mathrm{card}\, E$.

- Il y a 2^n parties dans E : Une partie A peut être codée par $(x_a)_{a\in E} \in \{0, 1\}^E$, avec $x_a = 1$ ssi $a \in A$.

- Deux ensembles E et E' ont même cardinal ssi il existe une bijection de E sur E'.

Exemple : Si $a \in E$ et $n = \mathrm{card}\, E$, Il y a $\binom{n-1}{p-1}$ parties de cardinal p contenant a.

- Un p-uplet injectif de E est un p-uplet $(x_1, ..., x_p) \in E^p$ où les éléments sont distincts deux à deux.

Si $n = \mathrm{card}\, E$, le nombre de p-uplets est n^p et le nombre de p-uplets injectifs est $n(n - 1)...(n - p + 1)$.

Il y a $n!$ permutations de $\{1, 2, ..., n\}$.

(3) **Racines des polynômes et polynômes irréductibles**

- a racine de P d'ordre $\geq m \;\Leftrightarrow\; P(a) = P'(a) = ... = P^{(m-1)}(a) = 0 \;\Leftrightarrow\; (X - a)^m$ divise P.

- Un polynôme de degré $\leq n$ admet au moins $(n + 1)$ racines (comptées avec multiplicité) est nul.

- Interpolation de Lagrange : Un polynôme P de degré $\leq (n - 1)$ est entièrement déterminé ses valeurs en n points.

On a $P(X) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i)L_i(X)$, où $L_i(X) = \prod_{j\neq i}(X - x_j)/(x_i - x_j)$.

- Un polynôme de degré n dont on connaît n zéros est scindé à racines simples.

Exemple : $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega^k)$, où $\omega = e^{2ik\pi/n}$, donc $1 + X + ... + X^{n-1} = \frac{X^{n-1}}{X-1} = \prod_{k=1}^{n-1}(X - \omega^k)$.

On a par exemple $X^3 - 1 = (X - 1)(X - j)(X - j^2)$, donc $1 + X + X^2 = (X - j)(X - j^2)$.

Exemple : Polynôme de Tchebytchev $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$. Les n réels $x_k = \cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n})$, avec $0 \leq k < n$ sont des racines distinctes de T_n. Comme $\deg T_n = n$ et de coefficient dominant 2^{n-1}, alors $T_n = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(X - x_k)$.

Remarque : Un polynôme de degré n admettant au moins $(n - 1)$ racines en admet n (car le quotient est de degré 1).

- Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les $X - \lambda$: Tout polynôme est scindé (d'Alembert-Gauss).

- Les racines complexes d'un polynôme réel sont deux à deux conjuguées.

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les $(X - \lambda)$ et les $(X^2 + aX + b)$, avec $a^2 - 4b < 0$.

Remarque : Tout polynôme de degré 2 ou 3 est irréductible ssi il n'a pas de racine.

En revanche, $X^4 + 1$ n'a pas de racine réelle mais n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

- Les racines d'un polynôme pair sont deux à deux opposées et dans $\mathbb{C}[X]$: $P(X) = Q(X^2) = (X^2 - \mu_1)...(X^2 - \mu_r)$.

(4) **Linéarité**

- Espaces vectoriels, sev, applications linéaires, image directe et réciproque d'un sev.

- Théorème fondamental : Si $\operatorname{Ker} u \oplus S = E$, alors u est un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$.

- Equation linéaire : $u(x) = b$, équation homogène et nature des solutions, principe de superposition.

Systèmes linéaires : $AX = B$ de rang $r = \operatorname{rg} A$. L'ensemble des solutions est soit vide soit $X_0 + \operatorname{Ker} A$.

(5) **Exemples de matrices**

- *Matrice circulante* : $A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} = aI_3 + bJ + cJ^2$, avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $\chi_J(x) = -(x^3 - 1)$.

Le polynôme caractéritique est scindé à racines simples, donc $J = PDP^{-1}$, avec $D = \operatorname{Diag}(1, j, j^2)$.

Donc $A = P(aI + bD + cD^2)P^{-1}$, et A est semblable à $\begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+bj+cj^2 & 0 \\ 0 & 0 & a+bj^2+cj \end{pmatrix}$.

- *Matrice de Van der Monde* : $M = (a_i^{j-1})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$.

La matrice de Van der Monde est la matrice de $K_{n-1}[X] \to K^{n-1}$ $P \longmapsto (P(a_1), ..., P(a_n))$ dans les bases canoniques.

En considérant $\det M$ comme un polynôme en a_{n-1} qui s'annule en les autres a_i, on montre : $\det M = \prod_{i<j}(a_j - a_i)$.

- *Matrices compagnons.*

Exemple : Si $\dim E = 2$ et u n'est pas une homothétie alors il existe un vecteur $x \neq 0$ qui n'est pas valeur propre.

Alors $\mathcal{B} = (x, u(x))$ est une base de E, et $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$, où $u^2(x) = ax + bu(x)$.

Exemple : Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$ sont tels que $\mathcal{B} = (x, u(x), u^2(x))$ base de E, alors $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$.

- *Matrices de permutation* : $M_\sigma = (E_{\sigma(1)}, ..., E_{\sigma(n)})$ où σ bijection de $\{1, 2, ..., n\}$ sur $\{1, 2, ..., n\}$.

L'endomorphisme associé est l'endomorphisme u de K^n définie par $u(e_j) = e_{\sigma(j)}$.

L'endomorphisme u est bijectif (car l'image de la base $(e_1, ..., e_n)$ est une base). Ainsi, $u \in GL(K^n)$.

On a, pour tout $j \in \{1, 2, ..., n\}m$, $(u_\sigma \circ u_{\sigma'})(e_j) = u(e_{\sigma'(j)}) = e_{\sigma \circ \sigma'(j)}$.

Donc $M_\sigma M_{\sigma'} = M_{\sigma \circ \sigma'}$. Ainsi, $\sigma \longmapsto M_\sigma$ est un morphisme de groupes de $(S_n, \circ)$ dans $(GL_n(K), \times)$.

En particulier, on a $(M_{\mathrm{Id}}) = I_n$ et pour tout σ, $(M_\sigma)^{-1} = M_{\sigma^{-1}}$.

- *Matrices élémentaires* (elles sont inversibles) : Matrices de permutation (échange), de transvections, de dilatations.

Une transvection $M = I_n + \lambda E_{ij}$, avec $i \neq j$: AM est obtenue en ajoutant λA_i à A_j (opérations sur les colonnes)

Une succession d'opérations sur les colonnes revient à passer de A à AP, avec P inversible.

De même, une succession d'opérations sur les lignes revient à passer de A à QA, avec Q inversible.

Par la méthode du pivot, on peut transformer A en J_r, d'où l'existence de P et Q tels que $QAP = J_r$.

- *Matrices de rang 1* : Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ de rang 1 s'écrit X^tY, avec $X \in K^n$ et $Y \in K^p$ non nuls.

En effet, les colonnes de A sont colinéaires à un même vecteur non nul Y, et elles ne sont pas toutes nulles.

- *Matrices triangulaires supérieures* : cf sev stables.

- *Matrices nilpotentes* : On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour simplifier (on dispose de la trigonalisation).

Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) A nilpotente : il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = O$

ii) 0 est la seule valeur propre de A, c'est-à-dire $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.

iii) A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte (et donc $A^n = O$).

- *Matrice de symétrie, matrices de projection* : $M^2 = I$, $M^2 = M$: cf diagonalisation.

- *Matrices symétriques réelles* (NB : la propriété de diagonalisation des matrices symétriques est spécifique à $\mathbb{R}$).

Matrice symétrique positive : Les valeurs propres sont positives, ce qui équivaut à $\forall X$, $(AX \mid X) \geq 0$.

- *Matrices de Gram*

Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a ${}^tAA = (\langle A_i, A_j \rangle)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq p}$ matrice carrée symétrique, et on a $\left\langle X, {}^t AAX \right\rangle = \|AX\|^2$.

Remarque : En fait, toute matrice réelle symétrique positive $M \in S_n(\mathbb{R})$ s'écrit $M = {}^tAA$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- *Matrices stochastiques* : On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique ssi $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$.

En fait, cette condition s'écrit vectoriellement $A\Omega = \Omega$, où Ω est le vecteur dont tous les coefficients valent 1.

Ainsi, un produit de matrices stochastiques est stochastique : $(AB)\Omega = A(B\Omega) = A\Omega = \Omega$).

Le vecteur Ω est vecteur propre de A. Toute valeur propre (complexe) est de module ≤ 1 (on étudie $AX = \lambda X$).

(6) **Familles libres, somme directe**

Une famille $(x_1, ..., x_n)$ est libre $\Leftrightarrow$ $(\sum \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i, \lambda_i = 0)$ $\Leftrightarrow$ aucun vecteur n'est combinaison des précédents.

F_1, F_2,..., F_n sont en somme directe ssi $\forall (x_1, ..., x_n) \in F_1 \times F_2 \times ... \times F_n$, $\sum x_i = 0 \Rightarrow \forall i$, $x_i = 0$.

Deux sev F et G sont en somme directe ssi $F \cap G = \{0\}$. Faux pour 3 sev (ou plus).

Les sev propres sont en somme directe.

Les seuls endomorphismes où tout vecteur non nul est vecteur propre sont les homothéties $\lambda\,\mathrm{Id}$.

(7) **Dimension et rang**

- Dans un ev E de dimension n, toute famille libre de cardinal n est une base. Exemple : Familles orthonormées.

- $\dim E = n$ ssi il existe un isomorphisme $u : K^n \to E$.

- Tout sev F de E vérifie $\dim F \leq \dim E$, alors égalité ssi $F = E$.

- Formule de Grassmann : $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

En particulier, si $\dim F + \dim G > \dim E$, alors $\dim(F \cap G) \geq 1$, c'est-à-dire $F \cap G \neq \{0\}$.

- Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Vect}(A_1, ..., A_p)$ et $\mathrm{Ker}\, A = \{X \mid AX = 0\}$.

On a $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}({}^tA) \leq \min(n, p)$ et $\mathrm{rg}(AB) \leq \min(\mathrm{rg}\, A, \mathrm{rg}\, B)$.

- Le rang n'est pas modifié en composant par un isomorphime : $\mathrm{rg}(PAQ) = \mathrm{rg}\, A$, pour $P \in GL_n(K)$ et $Q \in GL_p(K)$.

- *Théorème du rang* : $\mathrm{rg}\, u = \dim E - \dim \mathrm{Ker}\, u$. Si F est un sev de E, alors $\dim u(F) = (\mathrm{rg}\, F) - \dim(F \cap \mathrm{Ker}\, u)$.

- Si $\dim E = \dim F$, toute application linéaire injective $u : E \to F$ est bijective (isomorphisme).

En dimension finie, tout endomorphisme injectif est bijective. Exemple : $u : P \longmapsto P + XP'$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

- *Composées d'applications linéaires*

$v \circ u = 0$ ssi $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v$. En particulier, $u^2 = 0$ ssi $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$, d'où nécessairement $\operatorname{rg} u \leq \frac{1}{2}n$.

$\operatorname{Im}(u \circ v) = u(\operatorname{Im} v)$. Par le théorème du rang appliqué à $u_{|\operatorname{Im} v}$, on a : $\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg} v - \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} v)$.

(8) **Calculs matriciels**

- *Produit matriciel* : Avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $X \in K^p$, alors $Y \in K^n$ et $y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j$.

Avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$, alors $C = AB \in \mathcal{M}_{n,q}(K)$ et $c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}$.

Le coefficient (i, j) de ${}^tAB$ est le produit ligne-colonne ${}^tA_i B_j$, qui vaut $\langle A_i, B_j \rangle$ lorsque $K = \mathbb{R}$.

Exemple : Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$ et $D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, alors $AD = (\lambda_j a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$.

Exemple : Calcul de $(\lambda I_n + A)^k$ par le binôme (valable car les matrices commutent).

- *Produits par blocs* :

Exemple : Produits de matrices diagonales par blocs (respectivement triangulaires par blocs).

Exemple : La j-ième colonne de AB est AB_j.

- *Calcul de l'inverse d'une matrice*

On résout le système $AX = Y$. On obtient ainsi X en fonction de Y, ce qui donne A^{-1}, car $X = A^{-1}Y$.

Dans le cas $n = 2$, on résout un système 2×2 en éliminant pour chaque variable l'autre variable par pivot.

Dans le cas $n = 2$, on peut utiliser $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\,{}^t\widetilde{A}$: Si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

- *Calcul des déterminants et des polynômes caractéristiques*

Opérations élémentaires et/ou développement selon une ligne ou une colonne.

Calcul du polynôme caractéristique pour $n = 2$ ou 3. Pour $n = 2$: $\chi_A(x) = x^2 - (\operatorname{tr} A)x^2 + \det A$. Pour $n = 3$, on a $\chi_A(x) = x^3 - (\operatorname{tr} A)x^2 + \alpha x - (\det A)$. Parfois, on peut trouver α en choisissant une valeur de x bien choisie.

(9) **Déterminants**

- Déterminant d'une matrice :

Le déterminant est une forme n-linéaire alternée des colonnes (ou des lignes) $\to$ opérations élémentaires.

On a $\det(AB) = (\det A)(\det B)$, déterminants par blocs, $\det A = \det({}^tA)$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Développement selon une ligne ou une colonne : $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$ et $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$, avec $C_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$.

- Déterminant d'un endomorphisme (= déterminants des matrices qui le représentent).

- Déterminant dans une base $\mathcal{B}$ d'une famille de vecteurs : $\det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n) = \det A$, où $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n)$.

On a $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B} = 1$ et $\det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n) = \lambda \det_{\mathcal{B}'}(x_1, ..., x_n)$, où $\lambda = \det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' = \det(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})$: Résulte de $X = PX'$.

On a $\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), ..., u(x_n)) = (\det u) \det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n)$.

Interprétation en termes de volumes orientés : $\det u$ est le facteur par lequel les volumes sont multipliés.

(10) **Changements de bases, matrices équivalentes, matrices semblables**

- *Formules de changement de base*

$X = PX'$, avec $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'$.

$A' = Q^{-1}AP$, avec $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\, u$ et $A' = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}\, u$, $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$.

$A' = P^{-1}AP$ avec $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u(e_1), ...u(e_n))$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$.

- *Matrices équivalentes*

Si $r = \operatorname{rg} A$, alors il existe $P \in GL_p(K)$ et $Q \in GL_n(K)$ tels que $Q^{-1}AP = J_r$, où $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$.
En effet, si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, il existe des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ telles que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\, u = J_r$.

Pour A et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$ ssi il existe $P \in GL_p(K)$ et $Q \in GL_n(K)$ tels que $B = Q^{-1}AP$.

A et B sont équivalentes ssi on peut transformer A en B par une succession d'opérations élémentaires.

- *Matrices semblables*

Deux matrices sont semblables ssi elles représentent un même endomorphisme.

Deux matrices ont même déterminant et plus généralement même polynôme caractéristique (donc même trace).

Si $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ et $\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$. Donc $\chi_A(x) = x^n - (\operatorname{tr} a)x^{n-1} + ... + (-1)^n \det A$.

Remarque : Les matrices $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ont même polynôme caractéristique, mais ne sont pas semblables.

Remarque : Pour $\alpha \neq 0$, $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$: on passe de $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ à $\mathcal{B}' = (e_1, \frac{1}{\alpha}e_2)$.

(11) **Diagonalisation et trigonalisation**

- *Valeurs propres*

λ est valeur propre de u ssi $\exists\, x \neq 0$, $u(x) = \lambda x$, c'est-à-dire ssi $\dim E_\lambda \geq 1$, où $E_\lambda = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id})$.

λ est valeur propre de u ssi λ est racine du polynôme caractéristique χ_u, où $\chi_u(x) = \det(x \operatorname{Id} - u)$.

Si P polynôme et $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(\lambda) = P(\lambda)(x)$. Ainsi, si P est annulateur, alors $P(\lambda) = 0$ (car $P(u) = 0$).

- *Valeurs propres d'une restriction* : cf sous stables

Si λ racine de χ_u d'ordre de multiplicité $m \geq 1$, alors $1 \leq \dim E_\lambda \leq m$. En particulier, si $m = 1$, alors $\dim E_\lambda = 1$.

- *Trigonalisation*

Les valeurs propres d'une matrice *triangulaire* (supérieure ou inférieure) sont ses coefficients diagonaux.

Un endomorphisme est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé.

On en déduit que $\chi_A(x) = (x - \lambda_1)...(x - \lambda_n) = x^n - (\operatorname{tr} A)x^{n-1} + ... + (-1)^n \det A$.

- *Diagonalisation*

Les sous espaces propres sont toujours en somme directe (autrement dit, toutefamille de vecteurs propres associées à des valeurs propres distinctes) est libre.

u diagonalisable ssi la somme $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus ... \oplus E_{\lambda_r}$ des sous-espaces propres est E, donc ssi $\sum_{i=1}^{r} \dim E_{\lambda_i} = n$.

Ainsi, u diagonalisable ssi il existe une base $\mathcal{B}$ composée de vecteurs propres de u, c'est-à-dire ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$ diagonale.

Remarque : Si u diagonalisable, $\mathrm{Ker}\, u = E_0$ et $\mathrm{Im}\, u$ est la somme des sev propres E_λ, avec $\lambda \neq 0$.

En particulier, tout endomorphisme diagonalisable vérifie $\mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u = E$.

CNS de diagonalisation : χ_u scindé et pour toute valeur propre, $\dim E_{\lambda_i} = m$ ordre de λ comme racine de χ_u.

CS de diagonalisation : χ_u scindé à racines simples. Dans ce cas, les n sev propres sont des droites vectorielles.

- *Pratique de la diagonalisation*

On détermine les valeurs propres soit par calcul du polynôme caractéristique soit en étudiant le système $AX = \lambda X$.

On utilise aussi souvent le rang d'où on déduit la dimension du noyau, c'est-à-dire de E_0.

Par exemple, si $\mathrm{rg}\, A = 1$, alors $\chi_A(x) = x^n - \mu x^{n-1}$, où $\mu = \mathrm{tr}\, A$. Et A est diagonalisable ssi $\mu \neq 0$.

Pour λ valeur propre fixée, on résout le système $AX = \lambda X$ pour obtenir le sous-espace propre E_λ. On détermine une base $(P_1, P_2, ..., P_n)$ de vecteurs propres associées aux valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Alors $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

- *Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable*

Méthode par réduction : Il existe B diagonale telle que $A = P^{-1}BB$. Alors $A^n = P^{-1}B^nP$.

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} A^n = 0$ ssi les valeurs propres de A sont de module < 1.

- *Polynômes annulateurs*

Si $P(u) = 0$ et λ valeur propre, alors nécessairement $P(\lambda) = 0$: les valeurs propres sont DES racines de P.

Cas particulier des symétries : Supposons $u^2 + au + b\,\mathrm{Id} = 0$ dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.

On en déduit une relation de la forme $(u - \alpha\,\mathrm{Id})^2 = \beta^2\,\mathrm{Id}$. On se ramène donc à $v^2 = \mathrm{Id}$ (si $\beta \neq 0$) ou $v^2 = 0$.

Remarque : $v^2 = 0$ ssi il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, v = \left(\begin{array}{c|c} O & I_r \\ \hline O & O \end{array}\right)$, avec $r \leq \frac{1}{2}n$.

- *Remarques culturelles* : (*hors-programme*)

La restriction d'un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable.

Un endomorphisme est diagonalisable ssi il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples (cf cas paticulier).

(12) **Projections et symétries**

- *Caractérisations des projections et des symétries*

Si $E = F \oplus G$, la projection p de F sur G est $p : x \longmapsto y$, où $x = y + z \in F \oplus G$.

u projecteur ssi $u^2 = u$: Un projecteur est un endomorphisme diagonalisable de valeurs propres 0 ou 1.

Dans ce cas, u projection sur $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, u$.

A matrice de projection ssi $A^2 = A$ ssi il existe $P \in GL_n(K)$ et $r \leq n$ tel que $A = PJ_rP^{-1}$, avec $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$.

Si u projecteur, alors $\mathrm{tr}\, u = \mathrm{rg}\, u$.

u symétrie ssi $u^2 = \mathrm{Id}$ ssi u diagonalisable de valeurs propres -1 ou 1.

- *Projections et symétries orthogonales*

Soit F un sev de dimension finie (de E arbitraire). Alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires, et si $(e_1,...,e_p)$ est une base orthonormée de F, le projeté orthogonal de x sur F est $y=\sum_{j=1}^p \langle e_i,x\rangle\, e_i$. Et le projeté sur $F^\perp$ est $z=x-y$.

La réflexion d'hyperplan $H=a^\perp$ est la symétrie orthogonale par rapport à H. On a $s(x)=x-2\frac{\langle x,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a$.

Remarque : Si Z est un vecteur unitaire, la matrice carrée symétrique $(Z\ {}^tZ)$ est la matrice de la projection orthogonale u sur $\mathbb{R}Z$. En effet, $u(X)=\langle Z,X\rangle\ Z=Z\ \langle Z,X\rangle=Z({}^tZ)X$.

Plus généralement, la matrice de projection sur F de BON $(Z_1,...,Z_r)$ est $M=\sum_{i=1}^r Z_i({}^tZ_i)$.

Les projections et les symétries orthogonales sont symétriques (= diagonalisables dans une BON).

(13) **Sous-espaces vectoriels stables**

- *Restriction d'un endomorphisme*

Si $u\in\mathcal{L}(E)$ et $u(F)\subset F$, on définit $v=u_{|F}\in\mathcal{L}(F)$.

Le polynôme caractéristique d'une restriction $v=u_{|F}$ divise le polynôme caractéristique de u.

En effet, le polynôme caractéristique de $\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O & B \end{array}\right)$ est le produit $\chi_A\chi_B$.

La restriction v de u à un sev propre $E_\lambda=\mathrm{Ker}(u-\lambda\,\mathrm{Id})$ est l'homothétie $\lambda\,\mathrm{Id}$, de polynôme caractéristique $\chi_v(x)=(x-\lambda)^d$, où $d=\dim E_\lambda$. On en déduit que $(x-\lambda)^d$ divise χ_u, donc $d\leq m$ ordre de λ comme racine de χ_u.

La restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sev stable est diagonalisable (cf diagonalisation).

- *Matrices triangulaires supérieures*

Soit $\mathcal{B}=(e_1,...,e_n)$ une base et on considère $F_j=\mathrm{Vect}(e_1,...,e_n)$.

La matrice de u dans $\mathcal{B}=(e_1,...,e_n)$ est triangulaire supérieure ssi $u(F_j)\subset F_j$ pour tout $1\leq j\leq n$.

- On en déduit que le produit de matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure.

- *Endomorphismes commutant*

Si u et v commutent, alors $\mathrm{Ker}\,v$ et $\mathrm{Im}\,v$ sont stables par u.

En particulier, $u-\lambda\,\mathrm{Id}$ commute avec v, donc les sous-espaces propres E_λ de u sont stables par v.

En fait, si u diagonalisable, alors v commute avec u ssi les sous-espaces propres de u sont stables par v.

Remarque culturelle : Des endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux sont co-diagonalisables.

Si $A\in\mathcal{M}_n(K)$ est diagonale à n valeurs propres, B commute avec A ssi B est diagonale.

Les seules matrices qui commutent avec toutes les matrices (c'est-à-dire avec les E_{ij}) sont les homothéties λI_n.

- *Sous-espaces stables et orthogonalité*

Si $u\in O(E)$ est une transformation orthogonale et si F est un sev de E stable par u, alors $u(F)=F$ (car u bijective conserve la dimension), d'où on déduit $u(F^\perp)=F^\perp$.

Si u est une transformation symétrique, et si F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.

(14) **Produits scalaires**

- *Ecriture matricielle du produit scalaire canonique* : ${}^tXY$ dans $\mathbb{R}^n$.

Tout ev euclidien (dimension finie) admet une BON. Dans *toute* base orthonormée, le produit scalaire de deux vecteurs est le produit scalaire canonique de leurs coordonnées. En particulier, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i)^2$.

- *Exemples d'espaces préhilbertiens (= munis d'un produit scalaire) de dimension infinie* :

Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du p.s.c : $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$, $C^0([a,b],\mathbb{R})$ muni de $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\omega(t)\ dt$, avec $\omega > 0$.

Remarque : Pour prouver que $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\omega(t)\ dt$ définit un ps, on utilise la propriété sur les intégrales de fonctions positives : Si $a < b$ et $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et positive, alors $\int_a^b h(t)dt = 0$ ssi h identiquement nulle.

- *Orthogonal d'une partie* : $F^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in F,\ \langle x, y\rangle = 0\}$ est un sev, en somme directe avec F (si F sev).
On a $E^\perp = \{0\}$: Le seul vecteur orthogonal à tout vecteur est le vecteur nul.
En particulier, pour prouver que $a = b$, il suffit de prouver que $\forall x \in E$, $\langle x, a\rangle = \langle x, b\rangle$.

Si F est un sev de dimension finie, alors $F \oplus F^\perp = E$.

Complément culturel : *Contre-exemple en dimension infinie* : Considérons $E = C^0([a,b],\mathbb{R})$ muni de $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\ dt$ et le sev F des fonctions polynômes. Par le th. de Stone-Weierstrass, F est dense dans E pour $\|\ \|_\infty$ donc $\|\ \|_2$. Supposons $f \in F^\perp$. Alors $\langle P_n, f\rangle = 0$, donc $\langle f, f\rangle = 0$, d'où $f = 0$. Ainsi, $F^\perp = \{0\}$, et pourtant $F \neq E$.

- *Inégalité de Cauchy-Schwarz* :

On a : $P(t) = \|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t\,(x \mid y) + \|y\|^2 \geq 0$, donc $(x \mid y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$.
Cas d'égalité : Il y a égalité ssi x et y sont colinéaires de même sens.

- *Identité de polarisation* : Dans $\mathbb{R}$, $\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$.

- *Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt*

Principe : Si $E = F \oplus (\mathbb{R}a)$, alors $E = F \oplus^\perp (\mathbb{R}b)$, avec b projeté orthogonal de a sur $F^\perp$.

Ainsi, si $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ est une base, il existe une base orthonormée $(e_k)_{1\leq k\leq n}$ telle que $(e_1, ..., e_k)$ est une base orthonormée de $\operatorname{Vect}(a_1, ..., a_k)$. Il y a unicité si on impose $(e_k \mid a_k) > 0$, sinon il y a deux choix pour $e_k = \pm b_k / \|b_k\|$.

- *Polynômes orthogonaux* : On suppose $K[X]$ muni d'un produit scalaire.

La Gram-Schmidtisation de la base $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne une base orthonormée formée de polynômes de degrés échelonnés.

- *Distance à un sev* pour la norme euclidienne.

La distance de x à F est atteinte en y, projeté orthogonal de x sur F : Par Pythagore, $\|x - y\| = \inf_{z\in F} \|x - z\|$.

(15) **Isométries (= transformations orthogonales) et matrices orthogonales**

- Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$u \in O(E) \;\Leftrightarrow\; \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle \Leftrightarrow\; \|u(x)\| = \|x\| \;\Leftrightarrow$ l'image d'une (toute) BON est une BON.

- La matrice de Gram $A^T A$ est la matrice des $\langle A_i, A_j\rangle$.

$A \in O_n(\mathbb{R}) \;\Leftrightarrow A^T A = I_n \Leftrightarrow (A^{-1} = A^T) \Leftrightarrow$ Les colonnes de A forment une BON $\Leftrightarrow$ l'endomorphisme $A \in O(\mathbb{R}^n)$.

- Pour E euclidien, $u \in O(E)$ ssi sa matrice dans une (toute) BON est une matrice orthogonale.

- La matrice de passage entre deux bases orthonormées est une matrice orthogonale.

(16) **Endomorphismes auto-adjoints (= endomorphismes symétriques) et matrices symétriques**

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Dans une BON, en posant $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$, on a : $a_{ij} = \langle e_i, u(e_j)\rangle$.

u auto-adjoint ssi $\forall(x,y)$, $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$ ssi A symétrique (c'est-à-dire $a_{ji} = a_{ij}$, ce qui s'écrit $A^T = A$).

- *Théorème spectral* : Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base othonormée.

Ainsi, les endomorphismes auto-adjoints sont les endomorphismes diagonalisables dans une base orthonormée.

Exemple : Les projecteurs qui sont symétriques sont les projecteurs orthogonaux.

- *Endomorphismes symétriques (définis) positifs* :

$\forall x$, $\langle x, u(x)\rangle \geq 0$ (avec égalité ssi $x = 0$ dans le cas défini positif) ; les valeurs propres de u sont (strictement) positives.

Remarque : Les matrices symétriques définies positives $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ sont les matrices $M = A^T A$, avec $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

- *Hansdorffien d'un endomorphisme symétrique*

Si $x = (x_1..., x_n)$ dans une BON de diagonalisation de u, on a $\langle u(x), x\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ et $\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 x_i^2$.

Ainsi, la plus grande valeur propre de u est $\sup_{x\neq 0} \frac{(u(x)|x)}{\|x\|^2}$.

Norme d'un endomorphisme subordonnée à une norme euclidienne :
Pour évaluer la norme $|||A||| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2}$, on utilise $\|AX\|^2 = \langle X, MX\rangle$, avec $M = A^T A$ symétrique positive.

- *Forme bilinéaire associée à une matrice symétrique réelle* A :

L'application $\varphi : (X,Y) \longmapsto \langle AX, Y\rangle = \langle X, AY\rangle$ est bilinéaire symétrique.
φ est positive (c'est-à-dire $\forall X$, $\langle X, AX\rangle \geq 0$) ssi les valeurs propres de A sont positives (cf Hansdorffien).
φ est définie positive (c'est-à-dire $\forall X \neq 0$, $\langle X, AX\rangle \geq 0$) ssi les valeurs propres de A sont strictement positives.

Remarque : En fait, tout produit scalaire est la forme bilinéaire associée à une matrice symétrique définie positive.

- *Endomorphismes antisymétriques* : (complément hors-programme officiel)

$u \in \mathcal{L}(E)$ antisymétrique $\Leftrightarrow \forall(x,y) \in E^2$, $\langle x, u(y)\rangle = -\langle u(x), y\rangle \Leftrightarrow \forall x \in E$, $\langle x, u(x)\rangle = 0$.

u est antisymétrique ssi sa matrice A dans une (toute) base orthonormée est antisymétrique (c'est-à-dire $A^T = -A$).
La seule valeur propre réelle éventuelle est 0 ; lorsque n est impair, 0 est valeur propre (car $\det A^T = (-1)^n \det A$).

(17) **Formes linéaires**

- *Formes linéaires et hyperplans* : Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan.

Exemples : $X \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i$ dans K^n, $\varphi : \mathcal{M}_n(K) \to K\ M \longmapsto \text{tr}(AM)$, $\varphi : C^0([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}\ \ f \longmapsto \int_a^b f(t)\omega(t)\, dt$.

- *Equations d'un hyperplan* : Deux formes linéaires non nulles sont proportionnelles.ssi elles ont même noyau H
En effet, une forme linéaire φ s'annulant sur H est entièrement déterminé par $\varphi(a)$, où on a choisi $H \oplus (Ka) = E$.
Ainsi, tout hyperplan vectoriel admet une unique équation à scalaire près, de la forme $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$.

- *Théorème de représentation* (de Riesz) : En dimension finie, toute forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ sur un espace euclidien s'crit sous la forme $x \longmapsto (a \mid x)$, avec $a \in E$ (et a est unique).

On obtient ainsi un isomorphisme de E sur E^* (en associant à a la forme linéaire $\varphi : x \longmapsto \langle a, x \rangle$).

- Matriciellement, dans K^n, les formes linéaires sont les matrices ligne $L = (a_1\ a_2\ a_3\ ...\ a_n)$.

Des formes linéaires $L_1, ..., L_p$ sont indépendantes ssi les vecteurs $(L_1)^T, ...,\ (L_p)^T$ le sont.

Lorsque $K = \mathbb{R}$, on écrit $LX = (\Omega \mid X)$, où $\Omega =\ {}^tL$. On se ramène donc à des questions d'orthogonalité.

(18) **Géométrie vectorielle euclidienne**

- Deux bases d'un $\mathbb{R}$-ev ont même orientation ssi $\det P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} > 0$, c'est-à-dire $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' > 0$.

Une fois choisie une base $\mathcal{B}$ directe, on dit que $\mathcal{B}'$ est directe ssi elle admet même orientation que $\mathcal{B}$.

- Le produit mixte $\det(x_1, x_2, ..., x_n)$ d'une famille de n vecteurs est le déterminant dans une BOND (la valeur ne dépend pas du choix de la base, car la matrice de passage entre deux BOND est une matrice de rotation, de déterminant 1).

- Le produit mixte $\det(x_1, x_2, ..., x_n)$ est le volume orienté du parallélépipède engendré par les x_i.

Par exemple, dans le plan euclidien, l'aire (orientée) du triangle ABC est $\frac{1}{2}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

- On a $\det(u(x_1), u(x_2), ..., u(x_n)) = (\det u) \det(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Les endomorphismes de déterminant 1 sont les endomorphismes conservant le volume.

- *Exemples de transformations orthogonales* (ce sont les isomorphismes qui converve la norme, donc le ps).

Les symétries orthogonales, notamment les réflexions, sont des transformations orthogonales.

Par définition, les rotations sont les transformations orthogonales de déterminant 1 : $SO(E) = O^+(E)$.

- *Matrices de rotation en dimension 2 et 3*

En dimension 2, les matrices de rotation sont les $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, associée à $z \longmapsto e^{i\theta} z$ (si on identifie $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$).

En dimension 2, les matrices orthogonales indirectes sont les symétries orthogonales $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

Complément culturel : En dimension 3, toute matrice de rotation A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

- *Angles non orientés*

Pour x et y non nuls, on définit $\theta = \text{angle}(x, y)$ par $\cos\theta = \dfrac{(x \mid y)}{\|x\|\,\|y\|}$, qui $\in [-1, 1]$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

- *Equations d'un hyperplan affine* (*hors-programme*) : $M \in \mathcal{H} = A + \text{Vect}(e_1, ..., e_{n-1})$ ssi $\det(\overrightarrow{AM}, e_1, ..., e_{n-1}) = 0$.