

Épreuve orale Math-info de Centrale. Oaux choisis

Commencer par charger les bibliothèques classiques :

```
from math import * ; from scipy import *  
  
import numpy as np    # on peut ajouter : from numpy import * pour éviter np  
  
import matplotlib.pyplot as plt ; import numpy.linalg as alg  
  
from numpy.polynomial import Polynomial ; import numpy.random as rd  
  
import scipy.optimize as resol ; import numpy.linalg as alg
```

Exercice A. Loi multinomiale

Soient un entier $r \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ des v.a. indépendantes de loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, r\}$.

On pose $S_{r,n} = X_1 + \dots + X_n$.

1) Expliciter mathématiquement $E(S_{r,n})$ et le polynôme générateur de $S_{r,n}$.

2) Représenter la loi de $S_{r,n}$ de deux façons :

a) En utilisant les opérations PYTHON sur les polynômes pour calculer les coefficients de $S_{r,n}$.

b) Définir une fonction aléatoire simulant $S_{r,n}$ avec `rd.randint`, puis représenter la loi en utilisant un nombre important de tests (à l'aide d'un tableau d'occurrences des valeurs de $S_{r,n}$ sur $\llbracket 0, nr \rrbracket$).

3) Soit $f \in C^1([0, r], \mathbb{R})$. On pose $\omega_n(f) = E\left(f\left(\frac{S_{r,n}}{n}\right)\right)$.

a) Écrire une fonction PYTHON ayant pour arguments d'entrée f , r et n et renvoyant $\omega_n(f)$.

b) Tester la fonction précédente pour $f_\alpha : t \mapsto t^\alpha$ et $r = 3$ et $n = 15$ avec $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$. Comparer $\omega_n(f)$ et

$f_\alpha\left(E\left(\frac{S_{r,n}}{n}\right)\right) = f_\alpha\left(\frac{r}{2}\right)$. Conjecture ?

c) Justifier que f est lipschitzienne. En déduire la conjecture de b).

Exercice B. Suite définie implicitement

On considère $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - 2$.

1) Justifier que, pour $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel positif x_n tel que $f_n(x_n) = 0$.

2) Représenter $(x_n)_{1 \leq n \leq 50}$.

3) Prouver que $(x_n)_{n \geq 1}$ est strictement monotone et converge vers un réel L et en donner une estimation.

Exercice C. Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-tx)}{1+t} dt$.

Tracer la courbe représentative de F à l'aide de PYTHON.

Que peut-on conjecturer sur le domaine de définition, les variations et limites de F ?

Questions math supplémentaires : (i) Montrer que $F(x) \sim -\ln x$ lorsque $x \rightarrow 0$.

(ii) Montrer que F vérifie une équation différentielle d'ordre 1 et est de classe C^∞ .

Exercice D. Diagonalisabilité de matrices aléatoires

On note M la matrice $\begin{pmatrix} 0 & X - Y \\ X + Y & 0 \end{pmatrix}$, avec X et Y v.a.r. i.i.d. de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1) Estimer avec PYTHON la probabilité r que M soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On prendra ici $p = \frac{1}{2}$.

Remarque : Pour tester la non-diagonalisabilité, vérifier que la matrice renvoyée par `eig(M)[1]` n'est pas inversible (les vecteurs propres ne forment pas une base) : vérifier que la valeur approchée du déterminant est très proche de 0.

2) a) Montrer que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ssi $X \neq Y$. En déduire la probabilité.

b) Montrer que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ssi $X > Y$. En déduire la probabilité.

Exercice E. Étude d'une matrice

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n = ((i+j)!)_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

1) Justifier que la matrice H_n est diagonalisable.

2) Écrire en PYTHON un programme renvoyant H_n . Pour $n \in \{1, 2, 3\}$, calculer le déterminant de H_n et vérifier que les valeurs propres de H_n sont strictement positives.

3) Définir le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t) e^{-t} dt$. Vérifier que $H_n = (\langle X^i, X^j \rangle)_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n}$.

4) Expliquer comment on pourrait calculer une matrice $P_n \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $H_n = P_n^T P_n$.

Exercice F. Équations différentielles

1) Représenter avec PYTHON sur $[0, 20]$ la solution F de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 :

$$(E) : xy'' + y' + xy = 0 \text{ avec les conditions initiales } F(0) = 1 \text{ et } F'(0) = 0$$

2) On considère la fonction de Bessel B définie par $B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{4^n (n!)^2} x^{2n}$.

On approche $B(x)$ par $B_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \frac{1}{4^n (n!)^2} x^{2n}$.

Trouver numériquement N tel que $\forall x \in [0, 20], |B(x) - B_N(x)| < 10^{-12}$.

Tracer le graphe de B_N sur $[0, 20]$. Vérifier graphiquement que $B = F$.