

1) Soit X une variable aléatoire centrée à valeurs dans $[-1, 1]$.

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables indépendantes et de même loi que X . On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $t > 0$, $P(S_n > n\varepsilon) \leq \exp(-nt\varepsilon)E(\exp(tX))^n$.

b) Montrer que $\forall x \in [-1, 1], \forall t > 0, \exp(tx) \leq \frac{1}{2}((1-x)e^{-t} + (1+x)e^t)$.

c) En déduire que $E(\exp(tX)) \leq \exp(\frac{1}{2}t^2)$.

d) Montrer que $P(|S_n| > n\varepsilon) \leq 2 \exp(-\frac{1}{2}n\varepsilon^2)$.

1) **bis**) Soient $p \in]0, 1[$ et S_n une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

a) Montrer que $P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq \exp(-n \sup_{t>0}(at - \ln(1-p+pe^t)))$.

b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h(\varepsilon) > 0$ tel que $\forall n \geq 1, P\left(\frac{S_n}{n} \geq p + \varepsilon\right) \leq \exp(-nh(\varepsilon))$.

c) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h(\varepsilon) > 0$ tel que $\forall n \geq 1, P\left(\frac{S_n}{n} \leq p - \varepsilon\right) \leq \exp(-nh(\varepsilon))$.

2) On considère un jeu à n jetons entre deux joueurs A et B . Un jeton est échangé à chaque étape : le joueur A gagne un jeton avec une probabilité $p \in]0, 1[$ et perd un jeton avec une probabilité $q = 1 - p$.

Le jeu s'arrête lorsqu'un des deux joueurs obtient tous les jetons.

On note a_k la probabilité que A gagne en partant de k jetons. Calculer a_k pour tout $0 \leq k \leq n$.

3) Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} . Soient $0 < p < 1$ et $\lambda > 0$.

On suppose connues $P(X = x | Y = y)$ et $P(Y = y | X = x)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.

Montrer que la loi conjointe de (X, Y) est connue.

4) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. de Bernoulli indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$, où $0 < p < 1$.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On pose $N = \inf\{n \in \mathbb{N}^* | X_n = X_{n+1} = \dots = X_{n+r} = 1\} \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. On pose $a_n = P(N > n)$.

a) Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

b) Montrer que $(a_n)_{n \geq r}$ vérifie une récurrence linéaire d'ordre r .

c) Montrer (avec ou sans b)) que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient X_n et Y_n deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[[1, n]]$.

On note A_n l'événement : " le polynôme $z^2 + X_n z + Y_n$ admet deux racines réelles".

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Corrigé

1) a) L'application $x \mapsto \exp(tx)$ est strictement croissante, donc $P(S_n > n\varepsilon) = P(\exp(tS_n) > \exp(n\varepsilon))$.

On conclut par Markov (valide car $\exp(tS_n) \geq 0$, et avec $E(\exp(tS_n)) = E(\exp(tX))^n$).

b) On utilise la convexité de $f : x \mapsto \exp(tx)$: on écrit $x \in [-1, 1]$ comme valeur moyenne de -1 et 1 :

On a $f(x) = f(\frac{1}{2}(1-x) \times (-1) + \frac{1}{2}(1+x) \times 1) \leq \frac{1}{2}(1-x)f(-1) + \frac{1}{2}(1+x)f(1)$, d'où le résultat.

c) Par linéarité de l'espérance, $E(\exp(tX)) \leq \frac{1}{2}(E(1-X)e^{-t} + E(1+X)e^t) = \frac{1}{2} \text{ch } t$.

On vérifie (par étude de fonctions ou DSE) que $\text{ch } t \leq \exp(\frac{1}{2}t^2)$.

d) On a $P(S_n > n\varepsilon) \leq \exp(\frac{1}{2}nt^2 - nt\varepsilon)$, et on prend $t = \varepsilon$.

On note que $-S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$, avec $Y_k = -X_k$ centrée à valeurs dans $[-1, 1]$.

On a donc de même $P(-S_n > n\varepsilon) \leq \exp(-\frac{1}{2}n\varepsilon^2)$. Donc $P(|S_n| > n\varepsilon) \leq 2 \exp(-\frac{1}{2}n\varepsilon^2)$.

1) bis) La loi binomiale est la loi d'une somme de n variables de Bernoulli indépendantes de loi $B(p)$.

a) $P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) = P(\exp(tS_n) \geq \exp(nta)) \leq \exp(-nta)E(\exp(tS_n))$.

Or, $E(\exp(tS_n)) = E(\exp(tX))^n = (1-p+pe^t)^n$.

Donc $P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq \exp(-n\varphi(t))$, où $\varphi(t) = ta - \ln(1-p+pe^t)$. D'où le résultat.

b) On a, en $t = 0^+$, $\varphi(t) = ta - \ln(pt + o(t)) = (a-p)t + o(t)$.

Pour $a = p + \varepsilon$, on a donc $\varphi(t) > 0$ au voisinage de 0^+ , donc $\sup_{t>0}(ta - \ln(1-p+pe^t)) > 0$.

c) De même qu'en a), pour tout $t < 0$, on a $P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) = P(\exp(tS_n) \geq \exp(nta))$.

Donc $P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq \exp(-n \sup_{t<0}(ta - \ln(1-p+pe^t)))$. On procède de même qu'en b).

2) On a $a_0 = 0$ et $a_n = 1$.

On note E l'événement : "A gagne la partie" et E_0 : "A gagne un jeton lors du premier coup".

On a $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $a_k = P(E | E_0)p + P(\overline{E} | \overline{E_0})q$, donc $a_k = a_{k+1}p + qa_{k-1}$.

En effet, $(E | E_0)$ correspond à un jeu où le joueur A possède initialement $k+1$ jetons, qui est la situation après le premier tirage.

L'équation caractéristique $pz^2 - z + q = 0$ admet 1 et $\tau = \frac{q}{p}$ comme racines.

Si $\tau \neq 1$, il existe α et β tels que $a_k = \alpha + \beta\tau^k$, et on a donc $a_k = \frac{\tau^k - 1}{\tau^n - 1}$.

Si $\tau = 1$, il existe α et β tels que $a_k = \alpha + \beta k$, et on a donc $a_k = \frac{k}{n}$.

3) On pose $\lambda_{x,y} = \frac{P(X=x | Y=y)}{P(Y=y | X=x)} = \frac{P(X=x)}{P(Y=y)}$ d'où $P(X=x) = \lambda_{x,y}P(Y=y)$.

En fixant y , et en sommant sur x , on a donc $\sum_x \lambda_{x,y}P(Y=y) = 1$. D'où on déduit $P(Y=y)$ et $P(X=x)$.

Ainsi, les lois de X et Y sont connues. On en déduit $P(X=x, Y=y) = P(X=x | Y=y)P(Y=y)$.

4) a) On a $(N > n+1) \subset (N > n)$, donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante positive, donc converge.

b) Supposons $n \geq r$. On a pour $n \geq 1$, $P(N > n | X_1 = 0) = P(N > n) = a_{n-1}$.

Plus généralement, $\forall k \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$, $P(N > n | X_1 = X_2 = \dots = X_k = 1, X_{k+1} = 0) = a_{n-k-1}$.

Et enfin, $P(N > n | X_1 = X_2 = \dots = X_r = 1) = 0$ (car dans ce cas, $N = 1$).

Les événements $(X_1 = X_2 = \dots = X_k = 1, X_{k+1} = 0)$, où $0 \leq k < r$ et $(X_1 = X_2 = \dots = X_r = 1)$ forment une partition de l'univers.

Donc $\forall n \geq r$, $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} P(N > n | X_1 = \dots = X_k = 1, X_{k+1} = 0)P(X_1 = \dots = X_k = 1, X_{k+1} = 0)$

On obtient ainsi $\forall n \geq r$, $a_n = \sum_{k=0}^{r-1} p^k q a_{n-k-1}$.

c) *Preuve en utilisant b)* : Les racines de $z^r = \sum_{k=0}^{r-1} p^k q z^{r-k-1}$ sont de module < 1 :

En effet, si $|z| \geq 1$, alors $\sum_{k=0}^{r-1} p^k q \geq 1$, ce qui contredit $\sum_{k=0}^{+\infty} p^k q = 1$.

Donc par le cours sur les suites récurrentes linéaires, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$: en effet, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est combinaison linéaire de suites de la forme $(n^k z^n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $k \in \mathbb{N}$ et $|z| < 1$.

Preuve sans utiliser b) : Considérons les événements $A_q : X_{qr+1} = \dots + X_{(q+1)r} = 1$.

Les événements A_q sont indépendants, on a $P(A_q) = p^r$ et $\cup_{k=0}^{q-1} A_k \subset (N < qr)$.

Donc $a_{qr} = P(N > qr) \leq \prod_{k=0}^{q-1} P(\overline{A_k}) = (1 - p^r)^q$. On a $\lim_{q \rightarrow +\infty} (1 - p^r)^q = 0$. D'où le résultat.

5) On a $A_n : (X_n)^2 \geq 4Y_n$.

Donc $P(A_n) = \sum_{k=1}^n P(X_n = k)P(4Y_n \leq k^2 \mid X_n = k) = \sum_{k=1}^n P(X_n = k)P(4Y_n \leq k^2)$.

Pour $k \geq \sqrt{2n}$, $P(4Y_n \leq k^2) = 1$, donc $P(A_n) \geq \sum_{k=\lceil \sqrt{2n} \rceil}^n P(X_n = k) = \frac{n - \lceil \sqrt{2n} \rceil}{n} \rightarrow 1$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = 1$.