

◀ *Exo 1* : On considère les 2^m parties définies par $B_I = \bigcap_{i \in I} A_i$, où $I \subset \llbracket 1, m \rrbracket$.

Les B_I forment une partition de l'univers (en supprimant les B_I vides). La tribu engendrée par ces atomes contient tous les A_i (qui sont des unions disjointes de ces atomes), d'où le résultat.

◀ *Exo 2* : On a $B = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} (\bigcap_{n \geq p} A_n)$ est un événement. Supposons désormais que $\sum P(\overline{A_n})$ converge.

On a $P(\bigcup_{n \geq p} (\overline{A_n})) \leq \sum_{n \geq p} P(\overline{A_n})$ converge vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$.

Donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} P(\bigcap_{n \geq p} A_n) = 1$. Par limite croissante, $P(B) = 1$.

◀ *Exo 3* : On considère un tirage de toutes les boules.

($N \geq k$) correspond au cas où les boules blanches ont été tirées durant les $(n + m - k)$ premiers tirages.

Donc $P(N \geq k) = \binom{n+m-k}{n} / \binom{n+m}{n}$.

◀ *Exo 4* : Première solution : On note Δ l'image de X (et de Y).

On note que $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y) = P(Y = x)P(X = y) = P(X = y, Y = x)$.

Donc on a $E\left(\frac{X}{Y}\right) = \sum_{x < y} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) P(X = x)P(Y = y) + \sum_{x \in \Delta} P(X = x)P(Y = x)$.

Pour $x \neq y$, on a $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2$, on obtient $E\left(\frac{X}{Y}\right) \geq \sum_{x,y} P(X = x)P(Y = y) = 1 \times 1 = 1$.

Le cas d'égalité correspond au cas où $\forall x \neq y, P(X = x)P(Y = y) = 0$, donc au cas $X = Y$ presque sûrement.

Seconde solution : Comme X et Y indépendantes, alors $E\left(\frac{X}{Y}\right) = E(X)E\left(\frac{1}{Y}\right) = E(X)E\left(\frac{1}{X}\right)$.

Il s'agit alors de la propriété de Jensen sur les fonctions convexes (ici $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ convexe).

Il s'agit en effet de prouver que $E(f(X)) \geq f(E(X))$ pour f convexe

On utilise $\forall x, f(x) \geq f(\mu) + (x - \mu)f'(\mu)$, où $\mu = E(X)$, et on passe à l'espérance.

◀ *Exo 5* : On munit l'ensemble E des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de la loi uniforme.

Déterminer l'espérance et la variance du nombre N de points fixes de $\sigma \in E$.

Indication : On écrit $N = \sum_{i=1}^n Z_i$, avec $1_{\sigma(i)=i}$. Or, $E(Z_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. Donc $E(N) = 1$.

De même, $E(Z_i Z_j) = E(1_{\sigma(i)=i, \sigma(j)=j}) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$ pour $i \neq j$.

Donc $V(Z_i) = E(Z_i) - E(Z_i)^2 = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ et $\text{Cov}(Z_i, Z_j) = E(Z_i)E(Z_j)^2 - E(Z_i Z_j) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n-1)}$.

Donc $V(N) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \sum_{i \neq j} \frac{1}{n^2(n-1)} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = 1$.

◀ *Exo 6* : $X = \sum_{i=1}^n 1_{i \in A \cup B}$, donc $X = \sum_{i=1}^n (1_{i \in A} + 1_{i \in B} - 1_{i \in A} 1_{i \in B})$, donc $E(X) = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}n = \frac{3}{4}n$.

Remarque : Ici, les événements ($i \in A \cup B$) sont indépendantes, donc X la une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{3}{4})$.

◀ *Exo 7* : Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note Y_j le nombre d'antécédents de j par f .

On a $X = \sum_{j=1}^n 1_{Y_j \geq 2}$, donc $E(X) = \sum_{j=1}^n P(Y_j \geq 2)$. Or, $Y_j = \sum_{i=1}^n 1_{f(i)=j}$ suit une loi $\mathcal{B}(n, \frac{1}{n})$ comme somme de v.a. de Bernoulli indépendantes : en effet, $P(f(i) = j) = n^{n-1}/n^n = \frac{1}{n}$.

On a donc $P(Y_j \geq 2) = 1 - (1 - \frac{1}{n})^n - \binom{n}{1} \frac{1}{n} (1 - \frac{1}{n})^{n-1} - \binom{n}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 (1 - \frac{1}{n})^{n-2}$.

Donc $\frac{1}{n}E(X) = 1 - (1 - \frac{1}{n})^n - \binom{n}{1}\frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n})^{n-1} - \binom{n}{2}(\frac{1}{n})^2(1 - \frac{1}{n})^{n-2} \rightarrow 1 - e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-1} = 1 - \frac{3}{2}e^{-1}$.

◀ Exo 8 : $N \leq \sum_{i=1}^n 1_{X_i \geq a} = \text{card}\{i \mid X_i \geq a\}$, et on conclut par croissance et linéarité de l'espérance.

◀ Exo 8 bis : a) On a $N = N^+ + N^-$, où $N^+ = \text{card}\{X_i \mid X_i \geq a\}$ et $N^- = \text{card}\{X_i \mid X_i < a\}$.

Par l'exo 8), $E(N^+) \leq nP(X \geq a)$. Comme $N^- \leq \text{card}\{0, 1, \dots, a-1\} = a$, alors $E(N) \leq a + nP(X \geq a)$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Pour a assez grand, $P(X \geq a) \leq \varepsilon$. Pour n assez grand, $a \leq \varepsilon n$, d'où $E(N) \leq 2\varepsilon n$.

c) Par Markov, $P(X \geq a) \leq E(X)/a$. Avec $a = \sqrt{n}$, on obtient $E(N) \leq (1 + 1/a)\sqrt{n}$.

◀ Exo 9 : On devrait avoir $G_X(t)^2 = G_{X+Y}(t) = \frac{1}{5}(1 + t + \dots + t^4) = \frac{1}{5}\frac{t^5-1}{t-1}$ scindé à racines simples sur \mathbb{C} .

Mais $G_X(t)^2$ n'admet sur \mathbb{C} que des racines d'ordre pair. D'où une contradiction.

Variante : On suppose X et Y de lois différentes et $X + Y$ de loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, 5\}$.

On cherche à décomposer $G_{X+Y}(t) = \frac{1}{6}(1 + t + \dots + t^5) = \frac{1}{6}\frac{t^6-1}{t-1}$ comme produit de deux polynômes à coefficients réels positifs. On a $\frac{t^6-1}{t-1} = (t+1)(t^2-t+1)(t^2+t+1)$.

On obtient comme seule décomposition possible : $G_{X+Y}(t) = \frac{1}{3}(1 + t + t^2) \times \frac{1}{2}(1 + t^3)$.

◀ Exo 10 : a) On a pour $n \geq k$, $P(S_n = k) \geq P(X = 1)^k P(X = 0)^{n-k}$ associé à $(X_1, \dots, X_n) = (1, \dots, 1, 0, \dots)$.

b) Posons $a_n = P(Y = n)$. On a $P(Y \text{ pair}) = \sum_{k \text{ pair}}^{+\infty} a_k = \frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k)$.

c) On a $G_{S_n}(t) = (q + pt)^n$, donc $P(S_n \text{ pair}) = \frac{1}{2}((q+p)^n + (q-p)^n) \rightarrow \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$.

d) Posons $a_n = P(X = n)$. On a $G_{S_n}(-1) = G_X(-1)^n$, où $G_X(-1) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k$.

Comme a_0 et a_1 sont non nuls, alors $|G_X(-1)| < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_X(-1)^n = 1$.

On conclut avec $P(S_n \text{ pair}) = \frac{1}{2}(1 + G_X(-1)^n) \rightarrow \frac{1}{2}$.

Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, $P(d \text{ divise } S_n) = \frac{1}{d} \sum_{\omega \in U_d} G_X(\omega)^n \rightarrow \frac{1}{d}$.

En effet, si $\omega \in U_d \setminus \{1\}$, alors $|G_X(\omega)| = |a_0 + a_1\omega + \dots| < 1$, car a_0 et $a_1\omega$ non colinéaires.

◀ Exo 11 : a) S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, x)$. On a $E(\frac{1}{n}S_n) = x$ et $V(\frac{1}{n}S_n) = \frac{1}{n}x(1-x)$.

b) On a $|E(f(\frac{1}{n}S_n) - f(x))| \leq E(|f(\frac{1}{n}S_n) - f(x)|) \leq kE(|\frac{1}{n}S_n - x|)$.

Par Cauchy-Schwarz, $E(|\frac{1}{n}S_n - x|) \leq \sqrt{V(\frac{1}{n}S_n)} = \sqrt{\frac{1}{n}x(x-1)} \leq \sqrt{\frac{1}{4n}}$.

Or, $Q_n(x) = E(f(\frac{1}{n}S_n))$. Donc $\sup_{x \in [0,1]} |Q_n(x) - f(x)| \leq \sqrt{\frac{1}{4n}} \rightarrow 0$ en $+\infty$.

◀ Exo 12 : N suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. On a $E(N) = \frac{n}{2}$ et $V(n) = \frac{n}{4}$.

Donc par Bienaymé-Tchebychev, $P\left(\left|\frac{N}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.

Donc $P\left(\left|\frac{N}{n} - \frac{1}{2}\right| < 0.1\right) \geq 1 - \frac{100}{4n}$. On choisit n tel que $\frac{100}{4n} \leq \frac{1}{10}$.

◀ Exo 13 : On a $Y = \sum_{k=1}^X 1_{A_k}$ et on pose $Y_n = \sum_{k=1}^n 1_{A_k}$ qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

On a $P(Y = j) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y_n = j \mid N = n)P(N = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y_n = j)P(N = n)$ par indépendance.

Donc $P(Y = j) = \sum_{n=j}^{+\infty} \binom{n}{j} p^j q^{n-j} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \frac{p^j \lambda^j}{j!} e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(q\lambda)^m}{m!} = \frac{(p\lambda)^j}{j!} e^{-p\lambda}$ donc loi $\mathcal{P}(\lambda p)$.

◀ Exo 14 : a) On a A et $-A$ ont même loi, donc il en est de même pour A^k et $(-A)^k$.

Donc $E(\text{tr } A^k) = E(\text{tr } (-A)^k)$, et si k impair, on obtient $E(\text{tr } A^k) = 0$.

On a $\text{tr } A^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij}X_{ji}$, donc $E(\text{tr } A^2) = n$, car $E(X_{ii}^2) = 1$ et si $i \neq j$, $E(X_{ij}X_{ji}) = E(X_{ij})E(X_{ji}) = 0$.

On a $\text{tr } A^4 = \sum_{i,j,k,l} X_{ij}X_{jk}X_{kl}X_{li}$. Pour avoir $E(X_{ij}X_{jk}X_{kl}X_{li}) \neq 0$, il faut que chaque terme apparaisse un nombre impair de fois. Donc les seuls cas sont les (i, i, i, i) et (i, j, i, j) , avec $i \neq j$.

On obtient donc $E(\text{tr } A^4) = n + n(n-1) = n^2$.

b) On raisonne par récurrence à partir de $\det A = \sum_{i=1}^n X_{i1}(-1)^{i-1}\Delta_i$.

On a aussi $(\det A)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{i1}X_{j1}(-1)^{i+j}\Delta_i\Delta_j$.

On a par indépendance $E(X_{i1}X_{j1}\Delta_i\Delta_j) = E(X_{i1})E(X_{j1})E(\Delta_i\Delta_j) = 0$ si $i \neq j$, et $E(\Delta_i^2)$ si $i = j$.

Donc $E(\det A) = 0$ et $V(\det A) = E((\det A)^2) = nE(\Delta^2)$, donc par récurrence $V(\det A) = n!$

◀ *Exo 15* : On note X_1, \dots, X_n les variables aléatoires à valeurs dans $\llbracket 1, N \rrbracket$ associés aux n tirages.

On pose $Y = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ et $Z = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

Avec remise : $P(Y > k) = P(X_1 > k, \dots, X_n > k) = \left(\frac{N-k}{N}\right)^n$ par indépendance des X_i .

On a donc $E(Y) = \sum_{k=0}^N \left(\frac{N-k}{N}\right)^n = \sum_{k=0}^N \left(\frac{k}{N}\right)^n$, donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N}E(Y) = \frac{1}{n+1}$ par les sommes de Riemann.

Et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Y) = 1$ (car la proba d'obtenir 1 pour au moins un tirage tend vers 1).

Sans remise : $P(Y > k) = P(Z_1 > k, \dots, Z_n > k) = \binom{k}{n} / \binom{N}{n}$.

Donc $E(Y) = \sum_{k=0}^N \binom{k}{n} / \binom{N}{n} = \binom{N+1}{n+1} / \binom{N}{n} = \frac{N+1}{n+1}$ par la formule de la crosse de hockey.

Remarque : Pour $E(Z)$, on peut utiliser $P(Z > k) = 1 - P(Z \leq k)$, et $(Z \leq k) = \cap_{i=1}^n (X_i \leq k)$.

Mais on peut aussi déduire la valeur de $E(Z)$ de la valeur de $E(Y)$.

En effet, $N+1 - X_i$ sont indépendantes et de même loi que les X_i .

Donc $E(\max(N+1 - X_i)) = E(\min(X_i))$, d'où $N+1 - E(Z) = E(Y)$.

◀ *Exo 16* : Soit X_λ une v.a. de loi de Poisson $P(\lambda)$. On a $S_\lambda = P(X_\lambda \geq \lceil a\lambda \rceil)$. Or, $E(X_\lambda) = \lambda$ et $V(X_\lambda)$.

On déduit de Bienaymé-Tchebychev que $P(X_\lambda \leq \lambda - \varepsilon) \leq \frac{1}{\lambda\varepsilon}$ et $P(X_\lambda \geq \lambda + \varepsilon) \leq \frac{1}{\lambda\varepsilon}$.

On en déduit que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S_\lambda = 1$ si $a < 1$ et $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S_\lambda = 0$ si $a > 1$.

◀ *Exo 17* : On utilise la formule des probas totales associés à la valeur de X_1 .

Lorsque $X_1 = 1$, l'indice du premier 0 suit la loi $\mathcal{G}(q)$. Donc la longueur N de première séquence (contenant des 1) lorsque $X_1 = 1$ est d'espérance $\frac{1}{q}$.

On obtient ainsi $E(N) = pE(N | X_1 = 1) + qE(N | X_1 = 0) = p \times \frac{1}{q} + q \times \frac{1}{p}$.

De façon analogue, $E(M) = p \times \frac{1}{p} + q \times \frac{1}{q} = 2$.

On peut aussi obtenir des résultats par la loi conjointe : $P(N = n, M = m) = p^n q^m p + q^n p^m q$.

C'est en fait la solution attendue lors de l'oral (de Centrale).

Lorsque $p \neq q$, ce terme n'est pas de la forme $\alpha^n \beta^m$, donc N et M ne sont pas indépendantes.

◀ *Exo 18* : a) On a $P(X \leq k) = \binom{n-3}{k-3} / \binom{n}{k} = \binom{k}{3} / \binom{n}{3}$. Et $E(X) = \sum_{k=0}^n 1 - P(X \leq k)$.

Donc $E(X) = n+1 - \sum_{k=3}^n \binom{k}{3} / \binom{n}{3} = n+1 - \binom{n+1}{4} / \binom{n}{3} = n+1 - \frac{n+1}{4} = \frac{3n+3}{4}$.

b) On décompose X en somme de trois v.a. géométriques de paramètres respectifs $\frac{3}{n}$, $\frac{2}{n}$ et $\frac{1}{n}$. En particulier, $E(X) = \frac{n}{3} + \frac{n}{2} + n$.

◀ *Exo 19* : On a $p_{n+1} = P(X_{n+1} \text{ pair}) = P(X_n \text{ pair}, Z_{n+1} = 0) + P(X_n \text{ impair}, Z_{n+1} = 1)$.

Donc $p_{n+1} = p_n(1 - a_{n+1}) + (1 - p_n)a_{n+1} = (1 - 2p_n)a_{n+1} + p_n$.

D'où $p_{n+1} - \frac{1}{2} = (p_n - \frac{1}{2})(2a_{n+1} - 1)$ et $p_0 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, donc $p_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \prod_{k=1}^n (1 - 2a_k)$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{2}$ ssi $\prod_{n=1}^{+\infty} |1 - 2a_n| = 0$, donc ssi $(\exists n, a_n = \frac{1}{2})$ ou bien $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$.

◀ *Exo 20* : On considère une variable aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ de loi uniforme sur $\{-1, 1\}^n$.

On a $E((\sum_{k=1}^n X_k A_k)^2) = E(\sum_{j,k} X_j X_k \text{tr}(A_j A_k)) = \sum_{j,k} E(X_j X_k) \text{tr}(A_j A_k) = \sum_{k=1}^n \text{tr}(A_k)^2$.

Donc il existe $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que $\text{tr}((\sum_{k=1}^n \varepsilon_k A_k)^2) \geq \sum_{k=1}^n \text{tr}(A_k)^2$.

◀ *Exo 22* : Considérons qu'on mange *toutes* les pommes une à une, c'est-à-dire les $(r + v)$ pommes.

Alors p est la probabilité que la dernière soit rouge. On a donc $p = \frac{r}{r+v}$.

En termes de dénombrement, on obtient de même $p = \binom{r+v-1}{r-1} / \binom{v}{r}$.

◀ *Exo 24* : A chaque étape, il y a au plus une place assignée aux passagers restants qui est occupée par l'un des premiers passagers. Lorsqu'un passager à qui on a pris sa place doit choisir une autre place, il y a trois configurations :

- s'il choisit la place du premier passager, tous les passagers restants pourront accéder à leur place, y compris le dernier
- s'il choisit la place du dernier passager, ce dernier passager ne retrouvera donc pas sa place
- sinon, on est ramené à la situation précédente.

Les deux premiers cas étant équiprobables, on trouve donc une probabilité $p = \frac{1}{2}$.

Autre solution : Notons A_k l'événement : " une place des $(n - k + 1)$ passagers restants est occupée par l'un des $(k - 1)$ premiers passagers ".

A_{k+1} est réalisé ssi A_k est réalisé et si la place du k -ième passager est occupée et qu'il ne choisit pas la première place (celle du premier passager).

Lorsque A_{k-1} est réalisé, la place du k -ième passager est occupée avec une probabilité $\frac{1}{n-k+1}$, et dans ce cas, il ne choisit pas la première place avec une probabilité $\frac{n-k}{n-k+1}$.

Donc $a_k = a_{k-1} \left(\left(1 - \frac{1}{n-k+1}\right) \times 1 + \frac{1}{n-k+1} \times \frac{n-k}{n-k+1} \right) = a_{k-1} \frac{(n-k)(n-k+2)}{(n-k+1)^2}$.

On a $a_2 = \frac{n-1}{n}$ et $a_n = a_2 \prod_{k=2}^{n-1} \frac{(n-k)(n-k+2)}{(n-k+1)^2} = \frac{n-1}{n} \frac{1}{2} \frac{n}{n-1}$, et donc $p = 1 - a_n = \frac{1}{2}$