

1) Lois de probabilité

Important : Dans de n tirages *sans remise*, l'espace probabilisé considéré peut-être soit le n -uplet injectif des tirages successifs, soit la partie de cardinal n des objets sélectionnés lors des tirages successifs.

Exemple : La probabilité p de tirer 1 et 2 lors de n tirages sans remise dans $\llbracket 1, N \rrbracket$ vaut $\frac{\binom{N-2}{n-2}}{\binom{N}{n}} = \frac{n}{N} \frac{n-1}{N-1}$.

Exemple : Soit X une v.a. entière. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X = n) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X > n) = 0$.

Exemple : Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'événements mutuellement indépendants, avec $a_n = P(A_n) < 1$.

Alors $P(\cap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}) = \prod_{n=0}^{+\infty} (1 - a_n)$. D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 1$ ssi $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$.

Exemple : Si X et Y ont même loi, alors $P(X < Y) = P(Y < X) = \frac{1}{2} P(X \neq Y)$.

Exemple : Soit (B_1, \dots, B_n) une partition d'un ensemble E en n parties non vides.

Le nombre d'éléments de la tribu engendrée par (B_1, \dots, B_n) est 2^n . Ce sont les $\sqcup_{J \subset \llbracket 1, n \rrbracket} B_J$.

◀ *Exo 1* : (★) Soit (A_1, \dots, A_m) une famille de m parties d'un ensemble E .

Montrer qu'il existe une tribu de E de cardinal $\leq 2^{2^m}$ contenant tous les A_i .

Indication : Considérer les 2^m parties définies par $B_I = \cap_{i \in J} A_i$, où $I \subset \llbracket 1, m \rrbracket$.

◀ *Exo 2* : (★) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'événements et B : " il existe un rang à partir duquel A_n est vrai ".
Montrer que B est un événement. Montrer que si $\sum P(\overline{A_n})$ converge, alors $P(B) = 1$.

◀ *Exo 3* : (★) On considère des tirages sans remise dans une urne contenant n boules blanches et m rouges.

On s'arrête une fois les boules blanches tirées. Déterminer la loi du nombre N de boules rouges restantes.

Indication : Considérer un tirage de *toutes* les boules. En déduire $P(N \geq k) = \frac{\binom{n+m-k}{n}}{\binom{n+m}{n}}$.

◀ *Exo 4* : Soit X et Y deux v.a. à valeurs dans \mathbb{R}_+^* et i.i.d. Montrer que $E\left(\frac{X}{Y}\right) \geq 1$. Cas d'égalité ?

2) Fonctions caractéristiques $1_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$; $1_{A \cap B} = 1_A 1_B$, $1_{\Omega \setminus A} = 1_\Omega - 1_A$.

Exemple : $|X| = (1_{|X| \geq \lambda} + 1_{|X| < \lambda}) |X|$, donc $E(|X|) \leq \lambda P(|X| \geq \lambda) + 0 = \lambda P(|X| \geq \lambda)$, d'où Markov.

Exemple : $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - E(\prod_{i=1}^n (1 - 1_{A_i})) = 1 - \sum_{I \subset \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{\text{card } I} P(\cap_{i \in I} A_i)$.

Remarque : Si $a_k = P(\cap_{i \in I} A_i)$ en dépend que de $k = \text{card } I$, alors on obtient $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} a_k$.

Exemple culturel : Nombre d_n de dérangements (= permutation σ sans point fixe)

On écrit que $d_n = n! P(\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_n})$, où $A_i = P(\sigma(i) = i)$. On a $P(\cap_{i \in I} A_i) = \frac{(n-k)!}{n!}$, où $k = \text{card } I$.

Variation de comptage : Il s'agit des variables s'écrivant sous la forme $N = \sum_{i=1}^n 1_{A_i}$.

◀ *Exo 5* (♣) : On munit l'ensemble E des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de la loi uniforme.

Déterminer l'espérance et la variance du nombre N de points fixes de $\sigma \in E$.

Indication : On écrit $N = \sum_{i=1}^n Z_i$, où $Z_i = 1_{\sigma(i)=i}$.

On a $E(Z_i) = \frac{1}{i}$, $V(Z_i) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ et pour $i \neq j$, $\text{Cov}(Z_i, Z_j) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n^2(n-1)}$.

Remarque : Ici, les variables Z_i ne sont pas indépendantes. On ne peut calculer la loi de N simplement.

◀ *Exo 6* (♣) : Pour A et B parties aléatoires indépendantes de $\llbracket 1, n \rrbracket$, calculer $E(X)$, où $X = \text{card}(A \cup B)$.

Indication : $X = \sum_{i=1}^n 1_{i \in A \cup B}$, donc $X = \sum_{i=1}^n (1_{i \in A} + 1_{i \in B} - 1_{i \in A} 1_{i \in B})$, donc $E(X) = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}n = \frac{3}{4}n$.

◀ *Exo 7* : Soit f une application aléatoire de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On note X le nombre d'éléments admettant au moins 2 antécédents par f . Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} E(X)$.

◀ *Exo 8* : Soit X_1, \dots, X_n des v.a. entières, de même loi que X . Soit $a \in \mathbb{N}$.

On pose $N = \text{card}\{X_i \mid 1 \leq i \leq n \text{ et } X_i \geq a\}$. Montrer que $E(N) \leq nP(X \geq a)$. *Indication* : Noter que $N \leq \sum_{i=1}^n 1_{X_i \geq a}$.

◀ *Exo 8 bis* : Soit X_1, \dots, X_n des v.a. entières, de même loi que X .

a) On pose $N = \text{card}\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$. Montrer que $\forall a \in \mathbb{N}, E(N) \leq a + nP(X \geq a)$.

b) Montrer que $E(N) = o(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

c) On suppose $E(X) < +\infty$. Montrer que $E(N) = O(\sqrt{n})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3) Valeurs aléatoires à valeurs entières

- Lorsque X est d'espérance finie, on a : $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n)$.

Alors A est d'espérance finie ssi $\sum P(X > n)$ converge, et on a $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$.

Preuve par le th de Fubini. *Variante* : $\sum_{n=0}^N na_n = \sum_{n=0}^{N-1} R_n - N R_N$. Et $N R_N \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} ka_k \rightarrow 0$.

- Série génératrice $G_X(z) = E(z^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, avec $a_n = P(X = n)$, définie (et continue) pour $|z| \leq 1$.

Si X et Y sont indépendantes, $G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z)$. Extension à n v.a. mutuellement indépendantes.

On a (sous réserve d'existence) $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n = G'_X(1)$ et $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.

Exemple : Soit $\alpha > 0$. Il existe une v.a. entière X telle que $\forall t \in [0, 1], G_X(t) = (2 - t)^{-\alpha}$, car les coefficients du DSE sont positifs de somme 1 (valeur en $t = 1$).

On a en effet $P(X \geq \alpha + \varepsilon) \leq 2\alpha/\varepsilon^2$ car $E(X) = G'_X(1) = \alpha$ et $V(X) = \alpha(\alpha + 1) + \alpha - \alpha^2 = 2\alpha$.

- Formule des espérances conditionnelles : $E(Y) = \sum_k E(Y \mid B_k)P(B_k)$.

(preuve via Fubini et la formule des probabilités totales).

Formule de Wald : Si $X = \sum_{n=1}^N Z_n$, $G_X(t) = E(t^X) = \sum_k E(t^X \mid N = k)P(N = k) = G_N(G_X(t))$.

◀ *Exo 9* : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi sur $\{0, 1, 2\}$.

On note $S = X + Y$. La loi de S peut-elle être la loi uniforme sur $\{0, 1, 2, 3, 4\}$?

Indication : Utiliser $G_X(t)^2 = \frac{1}{5}(1 + t + \dots + t^4)$ scindé à racines simples sur \mathbb{C} .

Variante : On suppose X et Y indépendantes de lois différentes respectivement sur $\{0, 1, 2\}$ et $\{0, 1, 2, 3\}$.

On note $S = X + Y$. La loi de S peut-elle être la loi uniforme sur $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$?

◀ *Exo 10* : Soit $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$, avec X_i v.a. entières de même loi que X . On suppose $P(X = 0)$ et $P(X = 1) > 0$.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^{*-}$, $P(S_n = k) > 0$ pour n assez grand.

Indication : Pour $n \geq k$, comparer $P(S_n = k)$ et $P(X = 1)^k P(X = 0)^{n-k}$

b) Justifier que pour tout variable aléatoire entière Y , on a $P(Y \text{ pair}) = \frac{1}{2}(G_Y(1) + G_Y(-1))$.

Remarque : De même, $P(Y \equiv 0 [3]) = \frac{1}{3}(G_Y(1) + G_Y(j) + G_Y(j^2))$.

c) *Cas particulier* : Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \text{ pair}) = \frac{1}{2}$ si X suit une loi $\mathcal{B}(p)$, avec $0 < p < 1$.

d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \text{ pair}) = \frac{1}{2}$ et plus généralement, pour $d \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(d \text{ divise } S_n) = \frac{1}{d}$.

4) Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev, loi faible des grands nombres

- Inégalité Bienaymé-Tchebychev : $P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq V(X)/\varepsilon^2$.

- Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de v.a. i.i.d. de moment d'ordre 2 fini, on a $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\frac{1}{n}S_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0$.

On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers la v.a. constante μ , où $\mu = E(X_n)$.

Exemple : Supposons $X_\lambda \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Alors pour tous $a < 1 < b$, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} P(\lambda a \leq X_\lambda \leq \lambda b) = 1$.

Donc pour toute fonction lipschitzienne $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(f(\frac{1}{\lambda}X_\lambda)) = f(1)$.

◀ *Exo 11* : Soit $x \in [0, 1]$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre x .

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de S_n .

b) Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ k -lipschitzienne. On pose $Q_n(x) = E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)$. Calculer $E\left(\frac{S_n}{n}\right)$ et $V\left(\frac{S_n}{n}\right)$.

Montrer que $Q_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n})$ et que $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Indication : $|Q_n(x) - f(x)| = \left| E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right) \right| \leq k E\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right|\right) \leq k V\left(\frac{S_n}{n}\right)^{1/n}$, car $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = x$.

◀ *Exo 12 (♣)* : Soit N le nombre de *pile* obtenus dans n tirages *pile-face*. Proposer n tel que $P\left(\left|\frac{N}{n} - \frac{1}{2}\right| < 0.1\right) \geq \frac{9}{10}$.

5) Sommes

- Variance d'une somme : Avec $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $V(S_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i X_j)$.

Cas des v.a. non corrélées : $V(S_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$, donc $V(S_n) = O(n)$ si les X_i ont même loi.

- Formule de Wald : $S = \sum_{i=1}^N X_i$, avec X_i et N indépendantes. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

On a $G_S(z) = G_N(G_X(z))$ et $E(S) = E(N)E(X)$. On utilise notamment la formule des probas totales :

On a $P(S = k) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(S_n = k | N = n)P(N = n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(S_n = k)P(N = n)$.

- Marches aléatoires : $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, avec X_i à valeurs dans $\{-1, 1\}$, par exemple Rademacher.

Lien avec la loi binomiale. La probabilité de retour en 0 vaut 1 si la marche est équilibrée.

Elle vaut 0 sinon : En effet, si $p > \frac{1}{2}$, $P(S_n = 0) = O(\lambda^n)$, où $\lambda = 4pq < 1$.

Donc $\sum P(S_n = 0)$ converge, ce qui implique a fortiori que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cup_{k \geq n} (S_k = 0) = 0$.

◀ *Exo 13* : Le nombre X de clients qui entrent dans une boutique suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque client achète un article avec une probabilité $p \in]0, 1[$ et aucun sinon. Déterminer la loi du nombre Y d'articles achetés.

Indication : On a $Y = \sum_{k=1}^X 1_{A_k}$, où A_k : le k -ième client achète un article.

Remarque : En fait, cas particulier de Wald : $G_Y(z) = e^{\lambda(p+qz)(z-1)} = e^{\lambda p(z-1)}$.

◀ *Exo 14* : On considère une matrice aléatoire $A = (X_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$, où les X_{ij} , avec $i \leq j$, sont des v.a. indépendantes de loi de Rademacher.

a) Montrer que $E(\text{tr } A^k) = 0$ pour tout k entier impair. Montrer que $E(\text{tr } A^2) = n$ et $E(\text{tr } A^4) = n^2$.

b) Montrer que $E(\det A) = 0$ et $V(\det A) = n!$

6) Extremas

$Y = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$. Alors on a $(Z > k)$ ssi $\forall i, (X_i > k)$.

Si les X_i sont i.i.d. entières, $E(Z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (R_k)^n$ où $R_k = P(X > k)$ et $E(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} (1 - (1 - R_k)^n)$,

Remarque culturelle : Notons $X'_1 \leq \dots \leq X'_n$ les valeurs des X_k rangés par ordre croissant. Puisque les X_k sont i.i.d. de même loi que X , alors $P(X_{k-1} < X < X_k)$ ne dépend pas de k .

◀ *Exo 15 (♣)* : On considère n tirages dans une urne de N boules numérotées de 1 à N .

On note Y la valeur minimale des tirages obtenus. Calculer $E(Y)$ pour des tirages avec remise (resp. sans remise).

Déterminer $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} E(Y)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Y)$. Interpréter les résultats.

Indications : Avec remise : $E(Y) = \sum_{k=0}^N \left(\frac{N-k}{N}\right)^n \sim \frac{N}{n+1}$ lorsque $N \rightarrow +\infty$, et $\rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Sans remise : $E(Y) = \sum_{k=0}^N \binom{N-k}{n} / \binom{N}{n} = \sum_{k=0}^N \binom{k}{n} / \binom{N}{n} = \binom{N+1}{n+1} / \binom{N}{n}$ formule de la crosse de hockey.

7) Lois usuelles

- Loi uniforme sur $[[1, n]]$; on a $G_X(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z^k = \frac{z}{n} \frac{z^n - 1}{z - 1}$.

- Loi géométrique $\mathcal{G}(p) =$ loi du premier succès (à valeurs dans \mathbb{N}^*) ou du nombre N d'échecs avant succès (\mathbb{N}).

On a $P(M = k) = q^{k-1}p$ et $P(M > k) = q^k$, d'où $E(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{p}$. On a $N = M - 1$, donc $E(N) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}$.

- Loi binomiale négative = loi du m -ième premier succès : somme S de m v.a. géométrique.

On a $\forall k \geq m, P(S = k) = \binom{k-1}{m-1} q^{k-m} p^m$. *Remarque* : On a $G_S(z) = \left(\frac{pz}{1-qz}\right)^m$.

- Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$: λ représente souvent un flux moyen par unité de temps ou d'espace.

Si $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $X = \sum_{i=1}^N Z_i$ avec $Z_i \sim \mathcal{B}(p)$.

Remarque : La loi de X sachant $N = n$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

- Th des événements rares : Si $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$, la loi $\mathcal{B}(n, p_n)$ converge vers $\mathcal{P}(\lambda)$. On parle de convergence en loi.

- *Exemple culturel* : Soit Z_k v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

$X_n = \sum_{k=0}^{n-1} Z_k$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ et $Y_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k Z_k$ suit la loi loi uniforme sur $\llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket$.

Pour $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(f(X_n)) = f(\frac{1}{2})$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(f(Y_n)) \rightarrow \int_0^1 f(t) dt$.

◀ *Exo 16 (♣)* : Pour $0 \leq a < 1$ et pour $a > 1$, déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S_\lambda$, où $S_\lambda = e^{-\lambda} \sum_{k=\lceil a\lambda \rceil}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$.

◀ *Exo 17* : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. i.i.d. de Bernoulli de loi $\mathcal{B}(p)$, avec $0 < p < 1$. On note N la longueur de la première séquence de bits consécutifs égaux, et M la longueur de la deuxième séquence de bits consécutifs égaux.

Calculer $E(N)$ et $E(M)$. Les v.a. N et M sont-elles indépendantes ?

◀ *Exo 18* : Soit un entier $n \geq 3$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n .

a) On les tire une à une sans remise. On note X le nombre de tirages nécessaires pour obtenir les boules de numéros 1, 2, 3. Déterminer la loi de X et l'espérance de X .

b) Même question mais en procédant avec remise.

8) Etudes à un pas

a) *Exemple*

◀ *Exo 19* : Soit $X_n = \sum_{k=1}^n Z_k$, où les Z_k sont indépendantes de lois $\mathcal{B}(a_k)$. On pose $p_n = P(X_n \text{ pair})$.

Montrer que $p_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \prod_{k=1}^n (1 - 2a_k)$. En déduire une CNS pour que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{2}$.

b) *Exemple* : Chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $\{0, 1\}$ de matrice de transition $A = \begin{pmatrix} \bar{p} & q \\ p & \bar{q} \end{pmatrix}$.

Avec $\begin{cases} a_n = P(X_n = 0) \\ b_n = P(X_n = 1) \end{cases}$, on a $\begin{cases} a_{n+1} = \bar{p}a_n + qb_n \\ b_{n+1} = pa_n + \bar{q}b_n \end{cases}$. On calcule A^n pour calculer (a_n, b_n) .

Remarque : Les valeurs propres de A sont 1 et $1 - \text{tr } A = p + q - 1 \in [-1, 1]$.

c) *Premier doublet de succès (1,1)*

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de v.a. i.i.d. de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

On veut calculer la série génératrice et l'espérance de $N = \inf\{n \geq 1 \mid X_n = X_{n+1} = 1\}$.

Remarque culturelle : On a affaire ici à une chaîne de Markov de v.a. $Y_n = (X_{n-1}, X_n)$.

Solution : Avec $a_n = P(N = n)$, $b_n = P(N = n \mid X_0 = 0)$ et $c_n = P(N = n \mid X_0 = 1)$, on a :

$a_n = qb_n + pc_n$ et $b_1 = b_2 = 0$ et $\forall n \geq 3$, $b_n = a_{n-1}$ et $c_1 = 0$, $c_2 = p$ et $\forall n \geq 3$, $c_n = qa_{n-2}$.

D'où $a_0 = a_1 = 0$, $a_2 = p^2$ et $\forall n \geq 3$, $a_n = qa_{n-1} + pqa_{n-2}$ (suite de type Fibonacci).

Donc $G_N(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = p^2 t^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} (qa_{n-1} + pqa_{n-2}) t^n = p^2 t^2 + (qt + pqt^2) G_N(t)$.

Donc $G_N(t) = \frac{p^2 t^2}{1 - qt - pqt^2}$. Et $E(N) = G'_N(1) = 2 + p^2 \frac{q + 2pq}{(1 - q - pq)^2} = 2 + \frac{q + 2p}{p^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$.

d) *Remarque* : *Premier doublet (1,0)*

On lance indéfiniment une pièce donnant *Pile* avec la probabilité $p \in]0, 1[$.

On pose $M = \inf\{n \geq 2 \mid X_{n-1} = 1 \text{ et } X_n = 0\}$, avec les mêmes notations qu'au c).

La loi de M est en fait la loi du deuxième succès : On écrit M comme la somme de deux lois géométriques de paramètres respectifs p et q . Donc $G_M(t) = \frac{pt}{1-qt} \frac{qt}{1-pt}$. Et $E(M) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

e) *Probabilité du succès ou de ruine*

◀ *Exo 20* : On considère un jeu à n jetons entre deux joueurs A et B . Un jeton est échangé à chaque étape : le joueur A perd un jeton avec une probabilité p et gagne un jeton avec une probabilité $q = 1 - p$.

Le jeu s'arrête lorsqu'un joueur a gagné tous les jetons.

On note a_k la probabilité que A gagne en partant de k jetons.

Montrer que $a_0 = 0$, $a_n = 1$ et $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $a_k = pa_{k-1} + qa_{k+1}$. En déduire a_k .

9) Méthode probabiliste de preuve d'une existence

Principe : Si X v.a. à valeurs dans E et si $E(f(X)) \geq 0$, alors il existe $x \in E$ tel que $f(x) \geq 0$.

◀ *Exo 21* : Soient A_1, \dots, A_n des matrices appartenant à $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que $\text{tr}((\sum_{k=1}^n \varepsilon_k A_k)^2) \geq \sum_{k=1}^n \text{tr}(A_k)^2$.

10) Reformulation

◀ *Exo 22* : Un panier contient r pommes rouges et v pommes vertes. On mange les pommes une par une, en choisissant une pomme au hasard à chaque étape. On s'arrête lorsqu'il ne reste que des pommes vertes dans le panier. Quelle est la probabilité p que l'on ait mangé toutes les pommes ?

◀ *Exo 23* : (*Problème des allumettes de Banach*) On considère deux boîtes A et B contenant chacune n objets. A la k -ième étape, on choisit une boîte aléatoirement $Z_k \in \{A, B\}$, et on prend une allumette dans cette urne. On continue jusqu'à tomber sur une boîte vide.

Calculer la loi du nombre X d'allumettes restantes au moment où le processus s'interrompt.

Solution : $P(X = k) = 2 \times \binom{n+k}{n} 2^{-(n+k+1)} = \binom{n+k}{n} 2^{-(n+k)}$.

Remarque : Le processus peut être représenté par un schéma : on considère à chaque étape le point (a, b) où a est le nombre d'allumettes de A supprimées, et de même pour b . La probabilité $P(X = k)$ est la proportion de chemins qui sort du carré $\llbracket 0, n \rrbracket^2$ en (k, n) ou (n, k) .

◀ *Exo 24* : (X) n passagers, avec $n \geq 2$, montent dans un avion où une place a été attribuée à chaque passager. Le premier passager se trompe et prend une place arbitraire (y compris éventuellement la sienne). Pour chacun des suivants, si sa place est libre, il la prend. Sinon, il en choisit une aléatoirement.

Déterminer la probabilité p que le dernier passager s'assoit à la place qui lui était attribuée.