Analyse. Corrigé

1) a) A chaque fois, on traite le cas des suites constantes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (L)_{n\in\mathbb{N}}$.

Par linéarité, on peut donc se limiter au cas où $L = 0$.

On utilise ensuite les preuves de type Cesàro en coupant la somme en deux :

Soit $\varepsilon > 0$. Pour p assez grand, on a $\forall n \geq p$, $|u_n| \leq \varepsilon$.

Pour $n \geq p$, $2^{-n}(\sum_{k=0}^{n} 2^k u_k) \leq 2^{-n}(A + \sum_{k=p}^{n} 2^k \varepsilon) \leq 2^{-n}A + 2\varepsilon \leq 3\varepsilon$ pour n assez grand.

b) On utilise essentiellement le fait que $\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}$ est en $\mathfrak{o}_{+\infty}(2^n)$ car est un polynôme en n.

2) a) Par IPP, on a $\int_0^1 f(t)\ t^n\ dt = \dfrac{f(1)}{n+1} + R_n$, où $R_n = \dfrac{1}{n+1} \int_0^1 f'(t)\ t^{n+1}\ dt$.

Or, $|R_n| \leq \dfrac{1}{n+1} \int_0^1 |f'(t)|\ t^{n+1}\ dt \leq \dfrac{M}{n+1} \int_0^1 t^{n+1}\ dt = \dfrac{M}{(n+1)(n+2)}$, où $M = \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$.

Donc $\int_0^1 f(t)\ t^n\ dt = \dfrac{f(1)}{n+1} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{f(1)}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

b) Par deux IPP successives, on a

$$\int_0^1 \cos(n\pi t)\ f(t)\ dt = \left[\frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\ f(t)\right]_0^1 + \left[\frac{\cos(n\pi t)}{(n\pi)^2}\ f'(t)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(n\pi t)}{(n\pi)^2}\ f''(t)\ dt.$$

D'où $\int_0^1 \cos(n\pi t)\ f(t)\ dt = \left[\dfrac{\cos(n\pi t)}{(n\pi)^2}\ f'(t)\right]_0^1 + R_n$, avec $R_n = \int_0^1 \dfrac{\cos(n\pi t)}{(n\pi)^2}\ f''(t)\ dt = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

c) Par IPP, $\int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t}\ dt = \dfrac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t^2}\ dt$.

On a $0 \leq \int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t^2}\ dt \leq \int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{xt}\ dt = \mathfrak{o}_{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t}\ dt\right)$. Donc $f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{e^{-x}}{x}$.

2) bis) On a par IPP, $\left|\int_a^b \cos(\lambda f(x))\ dx\right| = \left|\int_a^b \dfrac{f'(x)\cos(\lambda f(x))}{f'(x)}\ dx\right|$.

Par IPP, $\left|\int_a^b \cos(\lambda f(x))\ dx\right| = \left[\dfrac{\sin(\lambda f(x))}{\lambda\ f'(x)}\right]_a^b + \int_a^b \dfrac{f''(x)\sin(\lambda f(x))}{\lambda f'(x)^2}\ dx$.

On a $\left|\int_a^b \dfrac{f''(x)\sin(\lambda f(x))}{f'(x)^2}\ dx\right| \leq \left|\int_a^b \dfrac{f''(x)}{f'(x)^2}\ dx\right| = \left[-\dfrac{1}{f'(x)}\right]_a^b \leq 2$. D'où on conclut aisément.

3) a) $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k/n} \to_{n\to+\infty} \int_1^2 \dfrac{1}{t}\ dt = \ln 2$ (Sommes de Riemann).

Variante : $\int_n^{2n} \dfrac{1}{t}\ dt \leq S_n \leq \int_{n+1}^{2n-1} \dfrac{1}{t}\ dt$ car $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ décroissante (comparaison sommes/intégrales).

donc par pincement, $\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln 2$.

b) On ne sait pas calculer simplement $\int \tan\left(\dfrac{1}{t}\right)\ dt$. Donc on va comparer $\tan(\theta)$ et θ.

Par l'inégalité de Taylor-Lagrange, $\forall \theta \in [0,1]$, $|\tan\theta - \theta| \leq \frac{1}{2}(2\theta^2) = \theta^2)$.

Donc $\left|\sum_{k=n}^{2n} \tan\left(\dfrac{1}{k}\right) - \sum_{k=n}^{2n} \dfrac{1}{k}\right| \leq \sum_{k=n}^{2n} \dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{n+1}{n^2} \to 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \tan\left(\dfrac{1}{k}\right) = \ln 2$.

4) On a $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \dfrac{1}{2}h^2 \sup|f''|$, donc $\forall h > 0$, $|f'(x)| \leq \dfrac{2\sup|f|}{h} + \dfrac{1}{2}h\sup|f''|$.

Ainsi, f' est bornée. On peut même choisir $h > 0$ minimisant le majorant.

Remarque : On peut améliorer l'inégalité en utilisant $|f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)| \leq h^2 \sup|f''|$.

Donc $\forall h > 0$, $|f'(x)| \leq \dfrac{\sup|f|}{h} + h\sup|f''|$, d'où on déduit $|f'(x)| \leq \sqrt{\dfrac{\sup|f|\ \sup|f''|}{2}}$.

4) bis) a) Par l'exo précédent, on a $\forall h > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f_n'(x)| \leq \dfrac{\sup|f_n|}{h} + hM$.

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $h > 0$ tel que $hM \leq \varepsilon$. Pour n assez grand, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f_n'(x)| \leq 2\varepsilon$.

b) On a $\forall h > 0$, $\left|f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x) - \frac{1}{2}h^2 f_n''(x)\right| \leq \frac{1}{6}h^3 M$.
Et de même $\left|f_n(x-h) - f_n(x) + hf_n'(x) - \frac{1}{2}h^2 f_n''(x)\right| \leq \frac{1}{6}h^3 M$.
En combinant les deux inégalités, on obtient $2h\,|f_n'(x)| \leq 2\sup|f_n| + \frac{1}{3}h^3 M$.
On en déduit aisément que $\lim_{n\to+\infty} \sup|f_n'| = 0$. On applique alors a) à $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$.

5) On a $\left|P(e^{i\theta})\right|^2 = P(e^{i\theta})\overline{P(e^{i\theta})} = \sum_{(j,k)} a_j \overline{a_k} e^{i(j-k)\theta}$, donc $\int_0^{2\pi} \left|P(e^{i\theta})\right|^2 \, d\theta = 2\pi \sum_{k=0}^n |a_k|^2$.

D'où $\sum_{k=0}^n |a_k|^2 = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|P(e^{i\theta})\right|^2 \, d\theta$, qui est la valeur moyenne de $|P(z)|^2$ sur le cercle unité.

Donc $\sum_{k=0}^n |a_k|^2 \leq \sup_{|z|=1} |P(z)|^2$.

6) a) Posons $f_n(x) = x^n - 1 - x$. On a $f_n'(x) = nx^{n-1} - 1 > 0$ lorsque $n \geq 2$ et $x > 1$.

D'où on déduit que f_n est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[-1; +\infty[$. D'où l'existence et l'unicité de x_n.

b) Soit $\varepsilon > 0$. On a $f_n(1) = -1$ et $f_n(1+\varepsilon) = (1+\varepsilon)^n - 2 - \varepsilon$ qui tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

Donc $f_n(1+\varepsilon) > 0$ pour n assez grand. Donc $f_n(1)f_n(1+\varepsilon) < 0$ et $1 \leq x_n \leq 1 + \varepsilon$ pour n assez grand.

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$. Posons $x_n = 1 + \alpha_n$, avec $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.
On a $n\ln(1+\alpha_n) = \ln(2+\alpha_n)$, donc $n\alpha_n \sim \ln 2$, c'est-à-dire $x_n = 1 + \dfrac{\ln 2}{n} + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

6) a) $\phi : x \longmapsto xe^x$ définit une bijection continue strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.

b) Posons $f(x) = \ln x + x$. On a $f(x_n) = \ln n$. Soit $M \geq 0$. Pour n assez grand, $\ln n \geq f(M)$, d'où $x_n \geq M$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ (on peut aussi utiliser $x_n = \phi^{-1}(n)$, avec ϕ défini au a)).

On a donc $\ln x_n + x_n \sim x_n$, donc $x_n \sim \ln n$. On obtient alors $x_n = \ln n - \ln x_n = \ln n - \ln\ln n + \mathfrak{o}(1)$.

b) Déterminer un équivalent de n lorsque n tedn vers $+\infty$.

8) $]0, +\infty[$ stable par g, d'où $0 < x_{n+1} < x_n$, d'où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'unique point fixe 0.
On vérifie alors que $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n}\right) = -g'(0)$, donc $x_n \sim \dfrac{\lambda}{n}$, où $\lambda = \dfrac{-1}{g'(0)}$.

9) On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n}$.

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} (u_n - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}$.

Indication : On procède par évaluations successives.
On montre $u_n \leq n$ par récurrence, d'où $u_{n+1} = O(\sqrt{n})$, c'est-à-dire $u_n = O(\sqrt{n-1}) = O(\sqrt{n})$.
D'où $u_{n+1} = \sqrt{n + \mathfrak{o}(n)} \sim \sqrt{n}$, donc $u_n \sim \sqrt{n-1} \sim \sqrt{n}$, donc $u_n = \sqrt{n} + \mathfrak{o}(\sqrt{n})$.
Puis enfin $u_{n+1} = \sqrt{n + \sqrt{n} + \mathfrak{o}(\sqrt{n})} = \sqrt{n} + \dfrac{1}{2} + \mathfrak{o}(1)$.
D'où $u_n = \sqrt{n} + \dfrac{1}{2} + \mathfrak{o}(1)$, car $\sqrt{n-1} = \sqrt{n} + \mathfrak{o}(1)$.

10) Posons $A = \{\sqrt{n} - \sqrt{m},\ (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$. Montrons que A est dense dans $\mathbb{R}$.
Si $a = \sqrt{n} - \sqrt{m} \in A$, alors $-a = \sqrt{m} - \sqrt{n} \in A$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $ka = \sqrt{nk^2} - \sqrt{mk^2} \in A$.
Donc pour tout $a \in A$, on a $\forall k \in \mathbb{Z}$, $ka \in A$.
De plus, on a $\inf(A \cap \mathbb{R}_+^*) = 0$, car $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $a \in A$ tel que $0 < a \leq \varepsilon$. Posons $k = \left\lfloor \dfrac{x}{a} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$.

On a $ka \in A$ et $x - ka \leq a \leq \varepsilon$. Donc tout x peut être approché arbitrairement près par des éléments de A.

11) On pose $\Delta_p = \left\{ \dfrac{k}{2^p}, k \in [\![0, 2^p]\!] \right\}$ et $\Delta = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \Delta_p$.

On vérifie par récurrence sur p que $\forall \lambda \in \Delta_p$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

De plus, Δ est dense dans $[0,1]$: pour tout $\lambda \in [0,1]$, $\lambda = \lim_{p \to +\infty} \dfrac{\lfloor 2^p \lambda \rfloor}{2^p}$, et $\dfrac{\lfloor 2^p \lambda \rfloor}{2^p} \in \Delta_p$.

Par continuité de f, on en déduit $\forall \lambda \in [0,1]$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

12) On a $\sqrt{n^2+1} = n\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{1/2} = n\left(1 + \dfrac{1}{2n^2} + O\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right) = n + \dfrac{1}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

Donc $\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = \sin\left(n\pi + \dfrac{\pi}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right) = \dfrac{(-1)^n \pi}{2n} + \varepsilon_n$, avec $\varepsilon_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Donc $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ converge comme somme de deux séries convergentes (CSSA et cv absolue).**13)** a) On pose $v_n = n^{-\alpha}\, u_n$. On montre que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1 + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Donc la série $\sum \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$ converge absolument, c'est-à-dire $(\ln(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel μ.

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\lambda = e^\mu$, d'où $u_n \sim \lambda\, n^\alpha$.

b) Posons $u_n = \dfrac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)}{n!}$. On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+\alpha}{n+1} = 1 + \dfrac{\alpha-1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Donc $u_n \sim \lambda\, n^{\alpha-1}$, c'est-à-dire $\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1) \sim \lambda\, n^{\alpha-1}\, n!$

14) On peut commencer par noter que $u_n \geq 0$ (par récurrence d'ordre 2), donc $u_{n+1} \geq u_n$.

Il existe donc $L = \lim_{n \to +\infty} u_n \in [1, +\infty[$. Si L est réel, alors $u_{n+1} - u_n \sim \dfrac{L}{n^\alpha}$, donc $\alpha > 1$.

Réciproquement, si $\alpha \leq 1$, on a $u_{n+1} \geq u_{n-1}\left(1 + \dfrac{1}{n^\alpha}\right)$, donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ car $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{(2n)^\alpha}\right) = +\infty$.

15) La boule unité est le parallèlogramme délimité par les droites $x + y = \pm 1$ et $2x - y = \pm 1$..

16) Comme $U \in O_n(\mathbb{R})$ ssi $-U \in O'_n\mathbb{R})$, alors $N(A) = \sup_{U \in O_n(\mathbb{R})} |\mathrm{tr}(AU)|$.

$N(A)$ existe car $U \longmapsto |\mathrm{tr}(AU)|$ est continue et que $O_n(\mathbb{R})$ est bornée. Le sup est atteint.

La seule propriété délicate à prouver est $N(A) = 0 \Rightarrow A = O_n$.

On montre d'abord que $\mathrm{Vect}(O_n(\mathbb{R})) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On en déduit que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AM) = 0$.

En prenant $M = A^T$ (on bien en notant que A est orthogonal à toute matrice), on obtient $A = O_n$.

17) - Si $r < |a|$, avec $\lambda = \dfrac{r}{|a|} < 1$, on a $\dfrac{1}{a - re^{i\theta}} = \dfrac{1}{a}\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n e^{in\theta}$.

La série de fonctions $\theta \longmapsto \sum \lambda^n e^{in\theta}$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$.

Donc $J = \dfrac{1}{a}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} \lambda^n e^{in\theta}\, d\theta$, d'où on déduit $J = \dfrac{2\pi}{a}$.

- Si $r > |a|$, avec $\mu = \dfrac{|a|}{r} < 1$, on a $\dfrac{1}{a - re^{i\theta}} = \dfrac{1}{r}\dfrac{e^{-i\theta}}{1 - \mu e^{-i\theta}} = \dfrac{-1}{r}\sum_{n=1}^{+\infty} \mu^n e^{-in\theta}$.

Il y a convergence normale en θ sur $[0, 2\pi]$. Donc on obtient ici $J = 0$.

18) La série de fonctions converge normalement (donc simplement) sur $\mathbb{R}$.

La série des dérivées converge normalement sur $\mathbb{R}$, car $\sup_{t \in \mathbb{R}} \dfrac{2\,|t|}{n}\exp(-nt^2) = \dfrac{\sqrt{2}e^{-1/2}}{n^{3/2}}$.

19) On a $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t(1+xt^2)} = \int_1^{+\infty}\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{xt}{1+xt^2}\right)\, dt = \left[\ln\dfrac{t}{\sqrt{1+xt^2}}\right]_1^{+\infty} \sim -\dfrac{1}{2}\ln(x)$ en $x = 0^+$.

En explicitant l'encadrement obtenu par comparaison entre somme et intégrale, on a $f(x) \sim -\dfrac{1}{2}\ln(x)$.

D'autre part, $\sum \dfrac{x}{n(1+xn^2)}$ converge normalement sur $]0,+\infty[$.

Par le th de la double limite, on a donc $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^3}$, donc $f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{\lambda}{x}$, où $\lambda = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^3}$.

20) a) R*emarque* : Si on suppose f de classe C^1, on a $f'(2x) = f'(x)$, donc f' constante. D'où f affine.

De plus, $f(0) = -1$, donc $f(x) = ax - 1$. Réciproque immédiate.

Avec $g(x) = f(x) + 1$, on se ramène à $g(2x) = 2g(x)$.

On a alors $g(x) = 2^n g(2^{-n}x) \to xg'(0) = f'(0)$, donc $g(x) = ax$, avec $a = f'(0)$.

Réciproquement, les $f(x) = ax - 1$ sont solutions évidentes.

b) Si f s'annule, f est identiquement nulle. Sinon, on a $f(x) = f(\frac{1}{2}x)^2 > 0$. On considère alors $\ln f$.

On obtient donc les solutions $\ln f(x) = ax$, c'est-à-dire $f(x) = e^{ax}$.

c) On écrit $f(x)$ sous la forme $f(x) = \tanh g(x)$. On obtient $\tanh(g(x+y)) = \tanh(g(x) + g(y))$.

En prenant $g(x) = \tanh^{-1}(f(x))$, on a $g(x+y) = g(x) + g(y)$.

D'où $g(x) = ax$ et ainsi, les solutions sont les $f(x) = \tanh(ax)$, avec $a \in \mathbb{R}$.

d) On a $f(nx) = f(x)^n$. On choisit $a > 0$ assez petit tel que $\forall x \in [-a,a]$, $\arg f(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

On pose $f(a) = e^{i\theta}$. On a $\forall x \in [-a,a]$, $f(\frac{1}{2}x)^2 = f(x)$. D'où $\forall k \in \mathbb{N}$, $f(2^{-k}a) = e^{i2^{-k}\theta}$, et $f(2^{-k}na) = e^{i2^{-k}n\theta}$.

Les $2^{-k}na$, avec $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, forment une famille dense dans U. Donc $f(x) = e^{i\theta x/a}$.

20) bis) On a $f(x) \geq 2^n f(x2^{-n}) \to 0$ lorsque n tend vers $+\infty$. Donc $f(x) \geq 0$.

D'où f croissante. Comme $f(0) = f(1) = 0$, alors $f = 0$.

21) Soit $\rho > 0$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq p$, $a^n\rho < 1$.

On a, pour $N \geq p$, $\prod_{n=0}^{N}(1 - a^n x) = \prod_{n=0}^{p-1}(1 - a^n x)\exp\left(\sum_{n=p}^{N}\ln(1 - a^n x)\right)$.

La série $x \longmapsto \sum \ln(1 - a^n x)$ converge normalement sur $[-\rho, \rho]$:

En effet, $\sup_{x\in[-\rho,\rho]} |\ln(1 - a^n x)| \leq \max(|\ln(1 - a^n\rho)|, \ln(1 + a^n\rho)) = |\ln(1 - a^n\rho)| = O(a^n)$.

Donc la restriction de f sur $[-\rho,\rho]$ est définie et continue. Ainsi, f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, $(1-x)f(ax) = (1-x)\prod_{n=1}^{+\infty}(1 - a^n x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.

Réciproquement, supposons g continue telle que $g(0) = 1$ et $g(x) = (1-x)g(ax)$.

Alors $g(x) = g(a^N x)\prod_{n=0}^{N-1}(1 - a^n x) \to_{N\to+\infty} f(x)$, car g étant continue en 0, on a $\lim_{N\to+\infty} g(a^N x) = g(0) = 1$.

22) a) On utilise le changement de variables affine $t = \dfrac{u}{n}$, avec $u \in [0,n]$.

On a $I_n = \dfrac{1}{n}J_n$, où $J_n = \int_0^n \left(1 + \dfrac{u}{n} + \dfrac{u^2}{n^2}\right)^{-n} du = \int_0^{+\infty} f_n(u)\, du$, en prenant $f_n(u) = 0$ lorsque $u > n$.

On a $\forall u \geq 0$, $\left(1 + \dfrac{u}{n} + \mathfrak{o}_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n \to e^u$, donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(u) = e^{-u}$.

D'autre part, pour $n \geq 2$, $\left(1 + \dfrac{u}{n} + \dfrac{u^2}{n^2}\right)^n \geq 1 + \binom{n}{2}\left(\dfrac{u}{n}\right)^2 \geq 1 + \dfrac{u^2}{4}$ car $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2} \geq \dfrac{n^2}{4}$.

Donc pour $n \geq 2$, $f_n(u) \leq \varphi(u) = \dfrac{1}{1 + u^2/4}$, et φ intégrable sur $[0,+\infty[$.

Par cv dominée, $\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_0^{+\infty} e^{-u}\, du = 1$, donc $I_n \sim \dfrac{1}{n}$.

b) On utilise le changement de variable $t = \dfrac{u}{n^{1/3}}$, avec $u \in [0, n^{1/3}]$.

On obtient $I_n = \dfrac{1}{n} J_n$, où $J_n = \int_0^n \left(1 + \dfrac{u^3}{n}\right)^{-n} du$.

On obtient comme au a) par convergence dominée $\lim_{n \to +\infty} J_n = \int_0^{+\infty} \exp(u^3)\ du = \lambda$.

On a $\lambda = \dfrac{1}{3} \int_0^{+\infty} v^{-2/3} \exp(v)\ dv = \dfrac{1}{3} \Gamma\left(\dfrac{1}{3}\right)$. Et on a $a_n \sim \dfrac{\lambda}{n^{1/3}}$

Remarque : Par une IPP, $a_{n+1} = \dfrac{3n-1}{3n} a_n$. Donc $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \dfrac{1}{3n} + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Par le critère (HP) de Raabe-Duhamel, on retrouve $a_n \sim \dfrac{\alpha}{n^{1/3}}$, où $\alpha > 0$..

c) Le pic est en 1, donc on utilise le changement de variable $t = 1 - \dfrac{u}{n}$.

On obtient $J_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} K_n$, où $K_n = \int_0^n \dfrac{(1-u/n)^n}{\sqrt{u}}\ dt = \int_0^{+\infty} f_n(u)\ du$.

Par convergence dominée, on montre que $\lim_{n \to +\infty} K_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\ du = \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

On peut prendre comme fonction de domination $\varphi(u) = \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$, car $\forall u \in [0, n]$, $1 - \dfrac{u}{n} \leq e^{-u/n}$.

23) *Les intégrales sont semi-convergentes, donc on ne peut pas utiliser le th de cv dominée*

a) On a $\int_0^A \dfrac{\sin t}{x+t}\ dt = \left[\dfrac{1-\cos t}{x+t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^A \dfrac{1-\cos t}{(x+t)^2}\ dt$. Donc $f(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos t}{(x+t)^2}\ dt$.

D'où l'exsitence de $f(x)$, et la continuité se déduit du th de continuité des intégrales paramétrées, car $0 \leq \dfrac{1-\cos t}{(x+t)^2} \leq \varphi(t) = \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ intégrable sur $]0, +\infty[$.

b) On applique le th de cv dominée pour un paramètre continue, avec $f(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos t}{(x+t)^2}\ dt$.

On utilise la domination par le fonction intégrable φ définie au a).

24) *Idée* : On utilise d'abord une IPP pour se ramener à $\int_0^{+\infty} e^{-xt} \omega(t)\ dt$, avec $\omega(0) = 1$.

Puis on effectue le changement de variable $u = xt$:

On a $f(x) = \dfrac{1}{x} \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}\ dt = \dfrac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-u}}{1+u^2/n^2}\ du$.

Par convergence dominée par $\varphi(u) = e^{-u}$, on a $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-u}}{1+u^2/n^2}\ du = \int_0^{+\infty} e^{-u}\ du = 1$.

Une autre méthode consiste à utiliser une nouvelle IPP pour obtenir $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

25) a) Posons $f_n(x) = \dfrac{1}{n + n^2 x}$. Pour $a > 0$, on a $\sup_{[a, +\infty[} |f_n| = \dfrac{1}{n + n^2 a} = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. Donc f est bien définie et continue.

b) Par comparaisons entre sommes et intégrales, on a $J(x) \leq f(x) \leq \dfrac{1}{1+x} + J(x)$,

où $J(x) = \int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t + t^2 x} = \int_1^{+\infty} \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{x}{1+tx}\right) dt = \left[\ln\left(\dfrac{t}{1+tx}\right)\right]_1^{+\infty} = \ln(x+1) - \ln x = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

On en déduit par pincement que $f(x) \sim -\ln x$ lorsque $x \to 0$.

En revanche, on ne peut obtenir ainsi un équivalent en $+\infty$.

On a $x f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{n + n^2 x}$, et $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{n + n^2 x}$ cv normalement sur $]0, +\infty[$, car $\dfrac{x}{n + n^2 x} \leq \dfrac{1}{n^2}$.

Par le th de la double limite, on a donc $\lim_{x \to +\infty} x f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$, donc $x f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{\pi^2}{6x}$.

26) La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ converge par le CSSA, et on a $|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k+x}\right| \leq \dfrac{1}{n+x} \leq \dfrac{1}{n}$.

Donc la série de fonctions $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$. Donc f existe et est continue.

En regroupant les termes 2 par 2, on a :
$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{x+2k} - \dfrac{1}{x+2k+1}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(x+2k)(x+2k+1)}$.
On utilise alors une comparaison entre séries et intégrales pour conclure.
On a $J(x) \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x(x+1)} + J(x)$, où $J(x) = \int_0^{+\infty} \left(\dfrac{1}{x+2t} - \dfrac{1}{x+2t+1}\right)\, dt = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$.
Donc $J(x) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{2x}$, d'où par pincement, $f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{2x}$.

27) a) Convergence normale sur $[0,a]$, pour tout $a<1$, car $\forall x \in [0,a]$, $\dfrac{x^n}{1+x^n} \leq a^n$.
b) On a $J(x) \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2} + J(x)$, où $J(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{x^t\, du}{1+x^t} = \dfrac{1}{-\ln x}\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-u}\, du}{1+e^{-u}}$, avec $u = -t\ \ln x$.
On a $\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-u}\, du}{1+e^{-u}} = \int_0^1 \dfrac{1}{1+t}\, du = \ln 2$. Donc $f(x) \sim \dfrac{\ln 2}{-\ln x} \sim \dfrac{\ln 2}{1-x}$ lorsque x tend vers 1^-.

28) Par une transformée d'Abel, on montre (via les sommes partielles) que pour $\theta \neq 0\ \ [2\pi]$,
$R_p(\theta) = \sum_{n=p}^{+\infty} \dfrac{e^{in\theta}}{n} = \sum_{n=p}^{+\infty} \dfrac{A_n(\theta) - A_{n-1}(\theta)}{n} = \sum_{n=p}^{+\infty} \dfrac{A_n(\theta)}{n(n+1)} - \dfrac{A_{p-1}(\theta)}{p}$, où $A_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$.
On a $\forall \theta \in [\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$, $|A_n(\theta)| = \left|\dfrac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right| \leq \dfrac{1}{\sin(\theta/2)} \leq \dfrac{1}{\sin(\varepsilon/2)}$.
Donc $|R_p(\theta)| \leq \dfrac{1}{\sin(\varepsilon/2)}\left(\dfrac{1}{p} + \sum_{n=p}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}\right) = \dfrac{2}{\sin(\varepsilon/2)}\dfrac{1}{p}$.
Donc $\sum \dfrac{e^{in\theta}}{n}$ converge uniformément sur tout $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$, où $0<\varepsilon<2\pi$.

Supposons par l'absurde que la série de fonctions $\sum \dfrac{e^{inx}}{n}$ converge uniformément sur $]0,2\pi[$.

Par le th de la double limite, on a alors la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{\theta\to 0, \theta>0} \dfrac{e^{in\theta}}{n}$.

Ce qui est absurde car $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge.

29) a) On a $R = \sup \Delta$, où $\Delta = \{\rho > 0 \mid (a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée }\}$.En fait, $\Delta = [0,R]$ ou $[0,R[$.

On a de même $R' = \sup \Delta'$, où $\Delta' = \left\{\rho > 0 \mid (\sqrt{a_n}\rho^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée }\right\}$.

On a $(\sqrt{a_n}\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée ssi $(a_n\rho^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ bornée. Donc $\Delta' = \sqrt{\Delta}$, d'où $R' = \sqrt{R}$.

b) Soit $\rho > 0$. Si $|z| < 1$, on a $z^{(n^2)} = \mathfrak{o}\left(\rho^n\right)$. Si $|z|>1$, on a $\rho^n = \mathfrak{o}\left(z^{(n^2)}\right)$. Donc $R = 1$.

30) a) Chaque permutation σ est entièrement défini par (A,d), où A est l'ensemble des points fixes de σ et où d est le dérangement de $[\![1,n]\!] \setminus A$ induit par σ. Il y a $n!$ permutations σ.

Donc $n! = \sum_A d_{n-\operatorname{card} A} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} d_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.
b) Posons $a_n = \dfrac{d_n}{n!}$. On a $0 \leq a_n \leq 1$, donc le rayon R de $\sum a_n x^n$ vérifie $R \geq 1$.
Par a), on a $1 = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(n-k)!} a_k$. Donc $\sum x^n$ est le produit de Cauchy de $\sum a_n x^n$ et de $\sum \dfrac{x^n}{n!}$
Donc $\forall x \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{1-x} = f(x)e^x$, d'où $f(x) = \dfrac{1}{1-x}e^{-x}$.
Par unicité du DSE, on a donc $a_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$, c'est-à-dire $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$.

31) En considérant $(\ln f)'$, on a $(1+x-x^2)f'(x) = \frac{1}{2}(1-2x)f(x)$.

Ainsi, f est l'unique fonction vérifiant $(1+x-x^2)y'(x) = \frac{1}{2}(1-2x)y(x)$ et $y(0)=1$.

Donc Or, en cherchant une solution $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ DSE de rayon $R > 0$, on obtient récurrence d'ordre 2 : il reste à trouver une majoration $|a_n| \leq \alpha\lambda^n$ pour valider $R > 0$.

32) Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$, alors $R \leq 1$. Comme $a_n = O(1)$, alors $R \geq 1$. Donc $R = 1$.

Ainsi, $\sum a_n z^n$ converge ssi $|z| < 1$ et diverge si $|z| > 1$. On a aussi $\sum a_n$ diverge.

D'autre part, on a $\sum_{n=0}^{N}(a_n - a_{n+1})z^n = (z-1)\left(\sum_{n=0}^{N} a_n z^n\right) - a_{N+1}z^{N+1} + a_0$.

Pour $|z| = 1$, $\sum_{n=0}^{N}(a_n - a_{n+1})z^n$ cv absolument, car $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n - a_{n+1}| = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_0$.

Si $|z| = 1$ et $z \neq 1$, alors $(z-1) \neq 0$, et on en déduit donc que $\sum a_n z^n$ converge.

33) On a $u_n = \alpha\varphi^n + \beta\psi^n \sim \alpha\varphi^n$ (cf suite de Fibonacci, et ici $\alpha > 0$, car $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$). Donc $R = 1/\varphi > 0$.

Pour $|z| < R$, $F(z) = (u_0 + u_1 z) + \sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1} + u_n)z^{n+2} = (u_0 + u_1 z) + z(F(z) - u_0) + z^2 F(z)$.

D'où pour $|z| < R$, on a $F(z) = \dfrac{u_0 + (u_1 - u_0)z}{1 - z - z^2}$

34) On cherche $\sum c_n x^n$ tel que $\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n\right) = 1$.

On trouve $c_0 = 1$ et la relation $\forall n \geq 2$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k+1)!} c_k = 0$, c'est-à-dire $c_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k+1)!} c_k$.

Il reste alors à prouver que le rayon de convergence de $\sum c_n x^n$ est > 0, ce qui résulte de $|c_n| \leq 1$.

35) On a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, donc $R = 1$. On a $2(n+1)a_{n+1} = (2n+1)a_n$.

D'où $\forall x \in]-1,1[$, $2f'(x) = 2xf'(x) + f(x)$, d'où $f(x) = f(0)(1-x)^{-1/2} = (1-x)^{-1/2}$, car $a_0 = 1$.

36) La série cv, car en $O(x^n)$. On utilise alors le th de Fubini pour la somme double $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} x^{np}$.

La famille est sommable pour $|x| < 1$, et on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n$, où $c_n = \sum_{d \text{ divise } n} 1 =$ nombre de diviseurs de n.

37) a) Posons $r_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. On a $r_1 = 1$ et $\forall n \geq 2$, $r_n = 1 + \dfrac{1}{(n+1)r_{n-1}}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $r_n \geq 1$, donc $\forall n \geq 2$, $r_n \leq 1 + \dfrac{1}{n+1}$. Donc $\lim_{n\to+\infty} r_n = 1$ et $R = 1$ par d'Alembert.

b) On a $\forall n \geq 2$, $(n+1)a_{n+1} - na_n = a_n + a_{n-1}$.

Sachant que $a_0 = 0$, on en déduit que $\forall x \in]-1,1[$, $\;f'(x) - xf'(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)f(x)$.

On a $\dfrac{x + 1/x}{1-x} = \dfrac{1}{x} - 1 + \dfrac{2}{1-x}$.

Donc $\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = A\exp(\ln x - x - 2\ln(1-x)) = \dfrac{Axe^{-x}}{(1-x)^2}$, avec $A = 1$ car $a_1 = 1$.

38) On suppose $\lim_{+\infty}(f' + f) = 1$. Montrer que f converge en $+\infty$ et déterminer sa limite.

Indication : On pose $\lambda(x) = f'(x) + f(x)$. On a ainsi $\lim_{+\infty} \lambda = 1$ et $f' + f = \lambda$.

Donc $f(x) = f(0)e^{-x} + e^{-x}\int_0^x \lambda(t)\, e^t\, dt$. On écrit $\lambda(x) = 1 + \omega(x)$, où $\lim_{+\infty} \omega = 1$.

On a ainsi $f(x) = f(0)e^{-x} + 1 - e^{-x} + e^{-x}\int_0^x \omega(t)\, e^t\, dt$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $a \geq 0$ tel que $\forall x \geq a$, $|x| \leq \varepsilon$.

Donc, pour $x \geq a$, on a $\left|\int_0^x \omega(t)\, e^t\, dt\right| \leq A + \int_0^x \varepsilon\, e^t\, dt \leq A + \varepsilon e^x$, où $A = \int_0^a \omega(t)\, e^t\, dt$.

Donc $\left|e^{-x}\int_0^x \omega(t)\, e^t\, dt\right| \leq Ae^{-x} + \varepsilon \leq 2\varepsilon$ pour x assez grand.

Donc $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\int_0^x \omega(t)\, e^t\, dt = 0$, et ainsi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

39) Si la limite existe, elle vérifie $L - \dfrac{1}{2}L = 1$, c'est-à-dire $L = 2$.

On pose $u_n = \dfrac{1}{2^n} v_n$ et on obtient $v_{n+1} - v_n = 2^{n+1}(1+\varepsilon_n)$, avec $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

Donc $u_n = \dfrac{1}{2^n}\left(u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1}\varepsilon_k\right)$. On conclut par Cesàro car $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1}\varepsilon_k = 0$.

39) On a $\sup f = +\infty$ car par exemple $\lim_{n\to+\infty} f(x,x) = +\infty$.

On pose $K = \{(x,y) \mid f(x,y) \leq f(1,1)\}$. On vérifie (avec soin) que K est fermé borné non vide.

Ainsi, f atteint son minimum sur K. On pose $m = \inf f(K)$.

On a $\forall (x,y) \notin K,\ f(x,y) \geq f(1,1) \geq m$, d'où on déduit $\inf f(\Delta) = m$.

Ainsi, f atteint son minimum sur Δ, qui est ouvert. Donc f est atteint en un point (a,b) de gradient nul.

39) bis) On a $\nabla f(x,y) = 0$ ssi $\begin{cases} y = 1/x^2 \\ x = 1/y^2 \end{cases}$, donc ssi $(x,y) = (1,1)$ sur Δ.

La Hessienne en $(1,1)$ est $\begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix} \in S_2^{++}(\mathbb{R})$, donc f admet un minimum local strict.

40) On cherche un changement de variable (affinie) $f(x,y) = g(u,v)$ de sorte que

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial x} - a\frac{\partial}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial x} - b\frac{\partial}{\partial y}$$

On a alors $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \beta\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial u} \circ \dfrac{\partial}{\partial v} = \dfrac{\partial^2}{\partial u \partial v}$.

Premier cas : On suppose $a \neq b$. On considère $g(u,v) = f(u+v, au+bv)$.

Le changement de variables affine $(x,y) = (u+v, au+bv)$ est valide car $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$.

On obtient alors, avec $\alpha = -(a+b)$ et $\beta = ab$, $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \alpha\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \beta\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(u+v, au+bv) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v)$.

L'EDP équivaut donc à $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = 0$, c'est-à-dire $g(u,v) = \varphi(u) + \psi(v)$, avec φ et ψ de classe C^2.

On a $(u,v) = \left(\dfrac{bx-y}{b-a}, \dfrac{ax-y}{a-b}\right)$, donc les solutions sont les $f(x,y) = \varphi\left(\dfrac{bx-y}{b-a}\right) + \psi\left(\dfrac{ax-y}{a-b}\right)$.

Donc les solutions sont les $f(x,y) = \widehat{\varphi}\,(bx-y) + \widehat{\psi}\,(ax-y)$, avec $\widehat{\varphi}$ et $\widehat{\psi}$ de classe C^2.

Second cas : On suppose $a = b$. On considère $g(u,v) = f(u, au+v)$.

Le changement de variables affine $(x,y) = (u, au+v)$ est valide car $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

On a $\dfrac{\partial}{\partial u} = \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}$, donc l'EDP équivaut donc à $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) = 0$.
Les solutions sont les $g(u,v) = \varphi(v) + u\ \psi(v)$, avec φ et ψ de classe C^2.

Donc les solutions sont les $f(x,y) = \varphi(y-ax) + x\ \psi(y-ax)$, avec φ et ψ de classe C^2.

42) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ x = (x_1, ..., x_n) \to f(x)$ de classe C^2.

On considère $g(y) = f(u(y))$, où u est linéaire. Exprimer ∇g et H_g en fonction de ∇f et H_f.

Indication : On a $g(y_1, ..., y_n) = f(\sum_{j=1}^n a_{1j}y_j, ..., \sum_{j=1}^n a_{nj}y_j)$, où A matrice de u dans la base canonique.
On peut faire le calcul à l'aide des dérivées partielles : $\dfrac{\partial g}{\partial y_j}(y) = \sum_{i=1}^n \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(u(y))\ a_{ij}$, etc.
Mais on peut aussi exploiter l'unicité du DL :

On a $f(x+h) = f(x) + h^T\nabla f(x) + \frac{1}{2}h^T H_f(x)h + \mathfrak{o}\left(\|h\|^2\right)$.

Donc $g(y+h) = f(A(y+h)) = g(Ay) + h^T A^T \nabla f(Ay) + \frac{1}{2}h^T A^T H_f(Ay)Ah + \mathfrak{o}\left(\|h\|^2\right)$.

On en déduit $\nabla g(y) = A^T \nabla f(Ay)$ et $H_g(y) = A^T H_f(Ay)A$.

42) bis) a) $\nabla f(x) = \nabla f(0) + \int_0^1 H_f(tx) \cdot x \; dt$.

b) $f(x) - f(y) = \int_0^1 \nabla f(x + t(y-x)) \cdot (y-x) \; dt = 0$ si $y - x \in F^\perp$.

Remarque : Preuve de b) directe : $f(x) = f(0) + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t) \; X^T \; H_f(tX) \; X \; dt$ en dérivant $t \longmapsto f(tx)$.