Analyse. Complément. Corrigé

1) a) On a $\dfrac{(\sin t)^3}{t^2} = (\sin t)\ \dfrac{\sin t}{t}\ \dfrac{\sin t}{t}$ est DSE comme produit (de Cauchy) de fonctions DSE.

Donc f est DSE est DSE comme primitive d'une fonction DSE.

b) $g(x) = \exp(\lambda x)\exp(\lambda x^2)...\exp(\lambda x^n)\exp(-n\lambda)$ est DSE comme produit (de Cauchy) de fonctions DSE.

Remarque : g est la série génératrice de la v.a. entière $Y = \sum_{k=1}^{n} kX_k$, où les X_k sont des v.a. de lois géométriques de paramètre λ : on a $G_X(x) = \exp(\lambda x - \lambda)$, et $G_{kX}(x) = \exp(\lambda x^k - \lambda)$.

c) *Première méthode* : $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, où $f_n(x) = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^n$ est DSE par produit de Cauchy.

On pose $f_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{n,k}x^k$. Pour $|x| < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} |c_{n,k}|\,|x|^k$ converge (vers $\exp\left(\frac{1}{1-|x|}\right)$).

La famille $\left(c_{n,k}x^k\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Donc on peut regrouper les termes selon la valeur de k.

Seconde méthode : $h(x)$ vérifie $h(0) = 1$ et l'équation différentielle $(1-x)^2h'(x) = h(x)$.

On cherche alors la solution de l'équation différentielle (qui est unique) sous la forme $\sum c_nx^n$.

On obtient $(n+1)c_{n+1} - (2n+1)c_n + (n-1)c_{n-1} = 0$ et $c_0 = 1$. D'où $|c_{n+1}| \leq 2\,|c_n| + |c_{n-1}|$.

Donc $|c_n| \leq u_n$, où $u_0 = c_0$, $u_1 = c_1$ et $u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}$. On a $u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$.

Donc $c_n = O(\rho^n)$, où $\rho = \max(|\lambda|, |\mu|)$. Donc le rayon R de $\sum c_nx^n$ vérifie $R \geq \rho^{-1}$, donc $R > 0$.

2) a) E se partionne en les points fixes de f et les paires de la forme $\{x, f(x)\}$, avec $f(x) \neq x$.

On choisit le nombre de paires $k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, puis les paires (et ensuite, les autres points sont fixes).

Donc $I_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}\binom{2k}{2}\binom{2k-2}{2}...\binom{2}{2}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{(n)!}{(n-2k)!(2k)!}\frac{(2k)(2k-1)}{2}...\frac{2\times 1}{2} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{(n)!}{(n-2k)!2^k}$.

Remarque : Il faut diviser par $k!$ car on choisit l'ensemble des k paires (et non les k-uplets de paires).

b) Une involution est une permuation (car $f^{-1} = f$). On a donc $I_n \leq n!$. D'où $R \geq 1$.

c) Pour construire une involution de E_{n+1}, il y a deux cas :

- si $f(n+1) = n+1$, on se ramène à construire une involution de E_n. Il y a I_n choix.

- si $f(n+1) = m \leq n$, on a $f(m) = n+1$, et on se ramène à construire une involution de $E_n \setminus \{m\}$.

Il y a n choix pour m, et m étant fixé, il y a I_{n-1} choix. Donc au total nI_{n-1}.

Donc $I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}$. d'où $(n+1)c_{n+1} = c_n + c_{n-1}$. On a $I_0 = 1$, donc $c_0 = 1$

D'où pour $|x| < R$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)c_{n+1}x^n = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(c_n + c_{n-1})x^n = f(x) + xf(x)$.

On en conclut $f(x) = f(0)\exp\left(x + \dfrac{x^2}{2}\right) = \exp\left(x + \dfrac{x^2}{2}\right) = \exp(x)\exp\left(x + \dfrac{x^2}{2}\right)$.

Par produit de Cauchy de deux séries entières de rayon $+\infty$, on obtient $R = +\infty$.

3) a) On a $\left|e^{i\theta X}\right| \leq 1$.Par le th du transfert, $G(e^{i\theta}) = \sum_{k=+\infty}^{+\infty} a_ke^{ik\theta}$, où $a_k = P(X = k)$.

Par cv normale sur le segment $[0, 2\pi]$, on a $\int_0^{2\pi} G(e^{i\theta})\ e^{-in\theta}\ d\theta = \sum_{k=+\infty}^{+\infty} a_k\ \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\ d\theta = 2\pi a_n$.

b) $P(X = n) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(e^{i\theta})\ e^{-in\theta}\ d\theta \leq \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|G(e^{i\theta})\right|\ d\theta = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(e^{i\theta})\ d\theta = P(X = 0)$.

c) On a $G(e^{i\theta}) = E(e^{i\theta X}) = \prod_{k=1}^{N} E(e^{i\theta Z_k})$ par indépendance.

Or, $E(e^{i\theta Z_k}) = 1 - 2p + 2p\cos(a_k\theta) \geq 0$, car $1 - 2p \geq 2p \geq |2p\cos(a_k\theta)|$. Donc $G(e^{i\theta}) \geq 0$.

4) a) Comme $\forall u > 0$, $\dfrac{u}{e^u - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} ue^{-nu}$ et $\int_0^{+\infty} ue = \dfrac{1}{n^2}$, alors par ITT, $I = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

b) Avec $t=1+\dfrac{u}{n}$, on a $J_n=\dfrac{1}{n^2}K_n$, où $K_n=\int_0^{+\infty}\dfrac{u}{(1+u/n)^n-1}\,du$.

On a par cv dominée $\lim_{n\to+\infty}K_n=\int_0^{+\infty}\dfrac{u}{e^u-1}du$, mais il faut trouver une fonction de domination !!!

On peut utiliser par le binôme $\left(1+\dfrac{u}{n}\right)^3\geq 1+\binom{n}{3}\dfrac{u^3}{n^3}\geq 1+\dfrac{u^3}{12}$ pour n assez grand.

Et $\varphi(u)=\dfrac{u}{1+u^3/12}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

5) a) On a $f_{n+1}(x_n)\leq f_n(x_n)=0=f_{n+1}(x_{n+1})$, donc $x_n\leq x_{n+1}$. Ainsi, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

b) On a $f(L)=f(L)-f(x_n)+f(x_n)=f(L)-f(x_n)+f(x_n)-f_n(x_n)$.

Donc $|f(L)|\leq|f(L)-f(x_n)|+|f(x_n)-f_n(x_n)|\leq|f(L)-f(x_n)|+\sup|f-f_n|$.

Comme f est limite uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors f est continue, donc $\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=f(L)$.

Donc par passage à la limite, $f(L)=0$.

6) $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{f(n)}$ est de même nature que $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{f(t)}\,dt$, car $\dfrac{1}{f}$ est décroissante positive.

Or, avec $t=f^{-1}(u)$, on a $\int_1^x\dfrac{1}{f(t)}\,dt=\left[\dfrac{t}{f(t)}\right]_1^x+\int_1^x\dfrac{tf'(t)}{f(t)^2}\,dt$.

On a $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{f(x)}=0$, car $\dfrac{x}{f(x)}\leq 2\int_{x/2}^x\dfrac{1}{f(t)}\,dt\to 0$ en $+\infty$.

Donc $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{f(t)}\,dt$ converge ssi $\int_1^{+\infty}\dfrac{tf'(t)}{f(t)^2}\,dt$ converge.

Or, avec $u=f(t)$, on a $f'(t)\,dt=du$, donc on obtient $\int_1^{+\infty}\dfrac{tf'(t)}{f(t)^2}\,dt=\int_{f(1)}^{+\infty}\dfrac{f^{-1}(u)}{u^2}\,du$.

(par un changement de variable, on a l'égalité des intégrales impropres, convergentes ou non).

Donc $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{f(t)}\,dt$ converge ssi $u\longmapsto\dfrac{f^{-1}(u)}{u^2}\,du$ est intégrable en $+\infty$.

7) $\Gamma(1+h)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\exp(h\ln t)\,dt=\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{h^n}{n!}(\ln t)^ne^{-t}\,dt$.

Posons $\forall n\in\mathbb{N}$, $c_n=\int_0^{+\infty}(\ln t)^n\,e^{-t}\,dt$. Pour appliquer ITT, on va majorer $\int_0^{+\infty}|(\ln t)^n|\;e^{-t}\,dt$.

Or, $\int_0^{+\infty}|(\ln t)^n|\;e^{-t}\,dt\leq\int_0^1(-\ln t)^n\,dt+\int_1^{+\infty}t^ne^{-t}\,dt\leq n!\;+\;\Gamma(n+1)=2\,n!$

On en déduit que pour $|h|<1$, la série $\sum\int_0^{+\infty}\dfrac{h^n}{n!}|(\ln t)^n|\;e^{-t}\,dt$ converge.

Donc par ITT, $\Gamma(1+h)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{h^n}{n!}c_n$ pour tout $|h|<1$. D'où le résultat.

8) a) Il existe $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall x\in]-1,1[$, $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n$.

Pour $|x|<1$, on a $|tx|<1$ pour tout $t\in[0,1]$, donc $T(f)(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{c_n}{n+1}x^n$.

Ainsi, $T(f)$ est bien définie par une série entière, et la linéarité de T est immédiate.

b) Par identication des séries entières, on a $T(f)=\lambda f$ ssi $\forall n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{c_n}{n+1}=\lambda c_n$.

On en déduit qu'il existe au plus un $p\in\mathbb{N}$ tel que $c_p\neq 0$, et dans ce cas, $\lambda=\dfrac{1}{p+1}$.

Donc les valeurs propres sont les $\lambda_p=\dfrac{1}{p+1}$, où $p\in\mathbb{N}$, et le sev propre est $E_{\lambda_p}=\mathbb{R}x^p$.

9) a) Pour $n\geq p$ assez grand, $u_n>0$, car $\lim_{n\to+\infty}u_n-1=0$. Posons $\varepsilon_n=u_n-1$.

Pour $n\geq p$, $A_n=\prod_{k=p}^n u_k=\exp\left(\sum_{k=p}^n\ln(1+\varepsilon_k)\right)$. On a $\ln(1+\varepsilon_n)=O(\varepsilon_n)$ et $\sum|\varepsilon_n|$ converge.

Donc $(\sum_{k=p}^n\ln(1+\varepsilon_k))_{n\geq p}$ converge, et on conclut avec $\prod_{k=0}^n u_k=\alpha\,A_n$, où $\alpha=\prod_{k=0}^{p-1}u_k$

b) On a $\|S_n\|\leq\prod_{k=0}^n\|M_k\|$.

Or, $|\|M_n\|-1|\leq\|M_n-I_p\|$. Par a), $\left(\prod_{k=0}^n\|M_k\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Donc $(\|S_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

D'autre part, $S_{n+1} - S_n = S_n(M_n - I_p)$, donc $\|S_{n+1} - S_n\| \leq \|S_n\| \, \|M_n - I_p\| = O(\|M_n - I_p\|)$.

Par comparaison, on en déduit que $\sum(S_{n+1} - S_n)$ converge absolument, donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

10) Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \geq p$ assez grand, $\frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$,, donc on a $\forall n \geq p$, $u_{n+1} \leq \sqrt{u_n + \varepsilon}$.

Donc $\forall n \geq p$, $u_n \leq v_n$ où $(v_n)_{n\geq p}$ définie par $v_p = u_p$ et $v_{n+1} = \sqrt{v_n + \varepsilon}$.

On vérifie (en étudiant $f : x \longmapsto \sqrt{x + \varepsilon}$) que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le pt fixe $\lambda(\varepsilon)$ de $f : x \longmapsto \sqrt{x + \varepsilon}$.

Donc $u_n \leq v_n \leq \lambda(\varepsilon) + \varepsilon$ pour n assez grand. Or, $\lim_{\varepsilon\to 0} \lambda(\varepsilon) = 1$. D'où $\lambda(\varepsilon) + \varepsilon$ arbitrairement proche de 1.

1) *Remarque* : Le critère spécial ne s'applique pas (le signe n'alterne pas).

On va regrouper les termes par 2.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^n a_n$, où $a_n = \dfrac{\sin(\ln n)}{n}$. On a $S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} (a_{2k} - a_{2k-1})$.

On a $|a_{2n} - a_{2n-1}| \leq \dfrac{\varphi(2n) - \varphi(2n-1)}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, où $\varphi(x) = \sin(\ln x)$.

On a $|\varphi'(x)| \leq \dfrac{1}{x}$, d'où on déduit par les accroissements finis : $|a_{2n} - a_{2n-1}| = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Donc $\sum (a_{2n} - a_{2n-1})$ converge absolument, d'où a fortiori $(S_{2n})_{n\geq 1}$ converge.

Comme $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, alors $S_{2n+1} = S_{2n} + \mathfrak{o}(1)$, donc $(S_n)_{n\geq 1}$ converge.

3) La série converge car le terme général est en $O(n^{-3})$.

Première méthode : $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{n+1} + \dfrac{\gamma}{n+2}$, avec $\alpha = \gamma = \dfrac{1}{2}$, $\beta = -1$.

D'où $S = \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) + \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$.

Seconde méthode : On considère $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)}$.

Par convergence normale sur $[0,1]$, f est continue sur $[0,1]$.

Par le séries entières, f est de classe C^∞ sur $[0,1[$.

On a $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ et $\forall x \in [0,1[$, $f^{(3)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$.

On pourra intégrer trois fois, mais il y a mieux :

Par la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral, $\forall x \in [0,1[$, $f(x) = 0 + \int_0^x \dfrac{(x-t)^2}{2!} f^{(3)}(t)\ dt$.

Donc $\forall x \in [0,1[$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\int_0^x \dfrac{(x-t)^2}{(1-t)}\ dt$.

Par continuité en $x = 1$, on obtient $S = f(1) = \dfrac{1}{2}\int_0^1 \dfrac{(1-t)^2}{(1-t)}\ dt = \dfrac{1}{2}\int_0^1 (1-t)\ dt = \dfrac{1}{4}$.

Remarque : Pour prouver la continuité, il vaut mieux développer $(x-t)^2$ afinde sortir les x de l'intégrale : $f(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{1-t}\ dt - \int_0^x \frac{t}{1-t}\ dt + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{t^2}{1-t}\ dt$ continues (somme de primitives).

4) a) Avec $X_n = (u_n, v_n)$, on a $X_{n+1} = AX_n$, et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ matrice diagonalisable.

Donc u_n et v_n sont en $O(\rho^n)$, où $\rho = \max(|\lambda|, |\mu|)$ est le module maximal des valeurs propres de A.

Donc $R \geq 1/\rho$, donc $R > 0$.

b) Pour $|x| < R$, $\begin{cases} u_{n+1}x^{n+1} = x^{n+1}(u_n - v_n) \\ v_{n+1}x^{n+1} = x^{n+1}(u_n - 2v_n) \end{cases}$, on obtient $\begin{cases} f(x) - u_0 = x(f(x) - g(x)) \\ g(x) - v_0 = x(f(x) - 2g(x)) \end{cases}$

c'est-à-dire $\begin{cases} (1-x)f(x) + xg(x) = u_0 \\ -xf(x) + (1+2x)g(x) = v_0 \end{cases}$, d'où on déduit les fractions rationnelles $f(x)$ et $g(x)$.

5) a) (*analyse*) Supposons $f(xy) = f(x)f(y)$. On a $f(x) = f(\frac{1}{2}x)^2 \geq 0$.

Si $f > 0$, on pose $g(x) = \ln f(e^x)$. Alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x+y) = g(x) + g(y)$.

On est ramené à un cas connu, et on a donc $g(x) = ax$. D'où $f(e^x) = e^{ax}$, c'est-à-dire $f(x) = x^a$.

Si f n'est pas strictement positive, alors $\exists\, y > 0$, $f(y) = 0$, donc $\forall x$, $f(xy) = 0$, d'où $f = 0$.

(*synthèse*) Les solutions sont donc 0 et les x^a, avec $a \in \mathbb{R}$.

b) (*analyse*) Supposons $f(xy) = f(x)f(y)$. On a $f'(x) = \lambda f(x)$, avec $\lambda = f'(0)$.

Leproblème est qu'il n'y a pas de logarithme complexe. On pose $g(\theta) = f(\exp(i\theta))$.

On a $g(\theta+\varphi) = g(\theta)g(\varphi)$. En dérivant par rapport à φ, $g'(\theta) = \lambda g(\theta)$, où $\lambda = g'(0) = f'(1)$. Donc $g(\theta) = \exp(i\lambda\theta)$.

Il faut aussi que g soit 2π-périodique, donc $\lambda \in \mathbb{Z}$.

(*synthèse*) Les solutions sont les $g(\theta) = \exp(in\theta)$, avec $n \in \mathbb{Z}$, donc les $f(x) = x^n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

6) Il existe M tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq M\lambda^{(2^n)}$, car toute suite en $O_{+\infty}(1)$ est bornée.

On a donc $u_n \leq \lambda \left(M + \sqrt{M + \sqrt{M + ... + \sqrt{M}}} \right) = \lambda v_n$, où $v_0 = M$ et $v_{n+1} = M + \sqrt{v_n}$.

On montre que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge par le point fixe μ de $f(x) = M + \sqrt{x}$: faire un schéma,

et noter que l'intervalle$[0, \mu]$ est stable par f et contient M, et que et $f \geq \mathrm{Id}$ sur cet intervalle.

Remarque : on vérifie par ailleurs que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante : en effet, on passe de u_n à u_{n+1} en remplaçant a_n par un terme plus grand qui est $a_n + \sqrt{a_{n+1}}$. On en déduit donc que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

9) On utilise la méthode de variation de la constante : on pose $u_n = (n!)\ v_n$.

On obtient $v_n - v_{n-1} = \frac{1}{n!}$, donc $u_n = (n!) \left(v_0 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!} \right)$.

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $\lim_{n\to+\infty} \left(v_0 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!} \right) = 0$, donc $u_0 = v_0 = -\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k!} = 1 - e$.

Dans ce cas, on a $u_n = (n!) \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k!} \right)$.

Par l'inégalité de Taylor-Lagrange à exp sur $[0, 1]$, on a $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k!} \right| \leq \dfrac{e}{(n+1)!}$. Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.