

Analyse. Complément

1) Montrer que les fonctions suivantes sont DSE en 0 :

a) $f : x \mapsto \int_0^x \frac{(\sin t)^3}{t^2} dt$; b) $g : x \mapsto \exp(\lambda \sum_{k=1}^n (x^k - 1))$, c) $h : x \mapsto \exp\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

2) Une involution de E est une fonction $f : E \rightarrow E$ vérifiant $f \circ f = \text{Id}$.

Les questions sont indépendantes

a) (★) On note I_n le nombre d'involutions de $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Montrer que $I_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(n)!}{(n-2k)!2^k k!}$.

b) On pose $c_n = \frac{I_n}{n!}$. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{I_n}{n!} x^n$ est > 0 .

c) Montrer (en distinguant les cas $f(n+1) \neq n+1$ et $f(n+1) = n+1$) que $I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}$.

En déduire une équation différentielle vérifiée par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$ et que $f(x) = \exp\left(x + \frac{x^2}{2}\right)$.

En conclure la valeur de R .

3) Soit X une variable aléatoire sur \mathbb{Z} , et pose $G(z) = E(z^X)$ pour $|z| = 1$.

a) Montrer que $P(X = n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$.

b) On suppose que $\forall \theta \in [0, 2\pi], G(e^{i\theta}) \geq 0$. Montrer que $P(X = 0) = \max_{n \in \mathbb{Z}} P(X = n)$.

c) On suppose que $X = \sum_{k=1}^N a_k Z_k$, où les $a_k \in \mathbb{Z}$ et où les Z_k sont des v.a. indépendantes de même loi :

$$P(Z_k = 1) = P(Z_k = -1) = p \text{ et } P(Z_k = 0) = 1 - 2p, \text{ où } p \leq \frac{1}{4}$$

Montrer que la propriété du b) est vérifiée.

4) a) Calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{u}{e^u - 1} du$.

b) (★) On pose $J_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}} = \int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^n-1} dx$. Montrer que $J_n \sim \frac{\pi^2}{6n^2}$.

5) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[0, 1]$. On suppose :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est strictement croissante, continues, et on a $f_n(0) \leq 0$ et $f_n(1) \geq 0$

- la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, c'est-à-dire $f_{n+1} \leq f_n$

- la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur $[0, 1]$.

a) On note x_n l'unique zéro de f_n . Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On pose $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

b) Montrer que L est un zéro de f , c'est-à-dire $f(L) = 0$.

Remarque culturelle : Contre exemple si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge seulement simplement vers f :

Avec $f_n(x) = 2x^n - 1$, on a $x_n = 2^{-1/n}$, $L = 1$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$ et $f(1) = 1$, donc $f(L) = 1$.

6) Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ une application de classe C^1 strictement croissante telle que $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{f(n)}$ converge ssi $t \mapsto \frac{f^{-1}(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

7) Soient $r > 0$ et E l'ensemble des fonctions $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ somme d'une série entière.

Pour $f \in E$, on pose $T(f) :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \int_0^1 f(tx) dt$.

a) Montrer que T est un endomorphisme de E .

b) Déterminer les valeurs propres de T .

8) (★) Montrer que $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est DSE au voisinage de 1, c'est-à-dire $h \mapsto \Gamma(1+h)$ DSE en 0.

9) a) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ réelle telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n - 1|$ converge. Montrer que $(\prod_{k=0}^n u_k)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

b) (★) On munit $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre $\| \cdot \|$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices.

On suppose que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|M_n - I_p\|$ converge. On pose $S_n = \prod_{k=0}^n M_k$. Montrer que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

10) (★) On considère $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + \frac{1}{n+1}}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Corrigé

- 1) Déterminer la nature convergente ou divergente de $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\sin(\ln n)}{n}$.
- 3) Calculer $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
- 4) (♣) On considère $(u_0, v_0) \neq (0, 0)$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - v_n$ et $v_{n+1} = u_n - 2v_n$.
- a) Montrer que les rayons de convergence des séries entières $\sum u_n x^n$ et $\sum v_n x^n$ sont > 0 .
- b) Calculer les sommes $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ et de $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$.
- 5) (♣) a) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continues vérifiant $f(xy) = f(x)f(y)$.
- b) Déterminer les fonctions $f : U \rightarrow U$ de classe C^1 vérifiant $f(xy) = f(x)f(y)$.
- 6) (♣) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = a_0 + \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \dots + \sqrt{a_n}}}$, où $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$.
On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $a_n = O(\lambda^{2^n})$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.
- 9) On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = nu_{n-1} + 1$.
On suppose $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée. Calculer u_0 , et montrer que dans ce cas, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

1) (♣) Déterminer la nature convergente ou divergente de $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\sin(\ln n)}{n}$.

2) (♣) Soit X une variable aléatoire sur \mathbb{Z} , et pose $G(z) = E(z^X)$ pour $|z| = 1$.

a) Montrer que $P(X = n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$.

b) On suppose que $\forall \theta \in [0, 2\pi], G(e^{i\theta}) \geq 0$. Montrer que $P(X = 0) = \max_{n \in \mathbb{Z}} P(X = n)$.

c) On suppose que $X = \sum_{k=1}^N a_k Z_k$, où les $a_k \in \mathbb{Z}$ et où les Z_k sont des v.a. indépendantes de même loi :

$$P(Z_k = 1) = P(Z_k = -1) = p \text{ et } P(Z_k = 0) = 1 - 2p, \text{ où } p \leq \frac{1}{4}$$

Montrer que la propriété du b) est vérifiée.

3) Calculer $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

4) (♣) On considère $(u_0, v_0) \neq (0, 0)$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - v_n$ et $v_{n+1} = u_n - 2v_n$.

a) Montrer que les rayons de convergence des séries entières $\sum u_n x^n$ et $\sum v_n x^n$ sont > 0 .

b) Calculer les sommes $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ et de $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$.

5) (♣) a) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continues vérifiant $f(xy) = f(x)f(y)$.

b) Déterminer les fonctions $f : U \rightarrow U$ de classe C^1 vérifiant $f(xy) = f(x)f(y)$.

6) (♣) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = a_0 + \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \dots + \sqrt{a_n}}}$, où $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0$.

On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $a_n = O(\lambda^{(2^n)})$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

7) (♣) a) Calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{u}{e^u - 1} du$.

b) (★) On pose $J_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}} = \int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^n-1} dx$. Montrer que $J_n \sim \frac{\pi^2}{6n^2}$.

8) (★) Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ une application de classe C^1 strictement croissante telle que $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{f(n)}$ converge ssi $t \mapsto \frac{f^{-1}(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

9) On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = nu_{n-1} + 1$.

On suppose $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée. Calculer u_0 , et montrer que dans ce cas, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

10) Une involution de E est une fonction $f : E \rightarrow E$ vérifiant $f \circ f = \text{Id}$. Les questions sont indépendantes.

a) (★) On note I_n le nombre d'involutions de $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Montrer que $I_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(n)!}{(n-2k)!2^k k!}$.

b) On pose $c_n = \frac{I_n}{n!}$. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{I_n}{n!} x^n$ est > 0 .

c) Montrer (en distinguant les cas $f(n+1) \neq n+1$ et $f(n+1) = n+1$) que $I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}$.

En déduire une équation différentielle vérifiée par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$ et que $f(x) = \exp\left(x + \frac{x^2}{2}\right)$.

En conclure la valeur de R .

11) Soient $r > 0$ et E l'ensemble des fonctions $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ somme d'une série entière.

Pour $f \in E$, on pose $T(f) :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \int_0^1 f(tx) dt$.

a) Montrer que T est un endomorphisme de E .

b) Déterminer les valeurs propres de T .

12) (★) Montrer que $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est DSE au voisinage de 1, c'est-à-dire $h \mapsto \Gamma(1+h)$ DSE en 0.

13) a) (♣) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ réelle telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n - 1|$ converge. Montrer que $(\prod_{k=0}^n u_k)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

b) (★) On munit $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre $\| \cdot \|$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices.

On suppose que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|M_n - I_p\|$ converge. On pose $S_n = \prod_{k=0}^n M_k$. Montrer que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Solutions

1) Remarque : Le critère spécial ne s'applique pas (le signe n'alterne pas).

On va regrouper les termes par 2.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k$, où $a_n = \frac{\sin(\ln n)}{n}$. On a $S_{2n} = \sum_{k=1}^n (a_{2k} - a_{2k-1})$.

On a $|a_{2n} - a_{2n-1}| \leq \frac{\varphi(2n) - \varphi(2n-1)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, où $\varphi(x) = \sin(\ln x)$.

On a $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{x}$, d'où on déduit par les accroissements finis : $|a_{2n} - a_{2n-1}| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Donc $\sum (a_{2n} - a_{2n-1})$ converge absolument, d'où a fortiori $(S_{2n})_{n \geq 1}$ converge.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, alors $S_{2n+1} = S_{2n} + o(1)$, donc $(S_n)_{n \geq 1}$ converge.

2) a) On a $|e^{i\theta X}| \leq 1$. Par le th du transfert, $G(e^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ik\theta}$, où $a_k = P(X = k)$.

Par cv normale sur le segment $[0, 2\pi]$, on a $\int_0^{2\pi} G(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta} d\theta = 2\pi a_n$.

b) $P(X = n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |G(e^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(e^{i\theta}) d\theta = P(X = 0)$.

c) On a $G(e^{i\theta}) = E(e^{i\theta X}) = \prod_{k=1}^N E(e^{i\theta Z_k})$ par indépendance.

Or, $E(e^{i\theta Z_k}) = 1 - 2p + 2p \cos(a_k \theta) \geq 0$, car $1 - 2p \geq 2p \geq |2p \cos(a_k \theta)|$. Donc $G(e^{i\theta}) \geq 0$.

3) La série converge car le terme général est en $O(n^{-3})$.

Première méthode : $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+1} + \frac{\gamma}{n+2}$, avec $\alpha = \gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = -1$.

$$\text{D'où } S = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Seconde méthode : On considère $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)}$.

Par convergence normale sur $[0, 1]$, f est continue sur $[0, 1]$.

Par les séries entières, f est de classe C^∞ sur $[0, 1[$.

On a $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ et $\forall x \in [0, 1[$, $f^{(3)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

On pourra intégrer trois fois, mais il y a mieux :

Par la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral, $\forall x \in [0, 1[$, $f(x) = 0 + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} f^{(3)}(t) dt$.

$$\text{Donc } \forall x \in [0, 1[, f(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1-t)} dt.$$

$$\text{Par continuité en } x = 1, \text{ on obtient } S = f(1) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{(1-t)} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t) dt = \frac{1}{4}.$$

Remarque : Pour prouver la continuité, il vaut mieux développer $(x-t)^2$ afin de sortir les x de l'intégrale :

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t}{1-t} dt + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{t^2}{1-t} dt \text{ continues (somme de primitives).}$$

4) a) Avec $X_n = (u_n, v_n)$, on a $X_{n+1} = AX_n$, et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ matrice diagonalisable.

Donc u_n et v_n sont en $O(\rho^n)$, où $\rho = \max(|\lambda|, |\mu|)$ est le module maximal des valeurs propres de A .

Donc $R \geq 1/\rho$, donc $R > 0$.

b) Pour $|x| < R$, $\begin{cases} u_{n+1}x^{n+1} = x^{n+1}(u_n - v_n) \\ v_{n+1}x^{n+1} = x^{n+1}(u_n - 2v_n) \end{cases}$, on obtient $\begin{cases} f(x) - u_0 = x(f(x) - g(x)) \\ g(x) - v_0 = x(f(x) - 2g(x)) \end{cases}$

c'est-à-dire $\begin{cases} (1-x)f(x) + xg(x) = u_0 \\ -xf(x) + (1+2x)g(x) = v_0 \end{cases}$, d'où on déduit les fractions rationnelles $f(x)$ et $g(x)$.

5) a) (*analyse*) Supposons $f(xy) = f(x)f(y)$. On a $f(x) = f(\frac{1}{2}x)^2 \geq 0$.

Si $f > 0$, on pose $g(x) = \ln f(e^x)$. Alors $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x+y) = g(x) + g(y)$.

On est ramené à un cas connu, et on a donc $g(x) = ax$. D'où $f(e^x) = e^{ax}$, c'est-à-dire $f(x) = x^a$.

Si f n'est pas strictement positive, alors $\exists y > 0$, $f(y) = 0$, donc $\forall x$, $f(xy) = 0$, d'où $f = 0$.

(*synthèse*) Les solutions sont donc 0 et les x^a , avec $a \in \mathbb{R}$.

b) (*analyse*) Supposons $f(xy) = f(x)f(y)$. On a $f'(x) = \lambda f(x)$, avec $\lambda = f'(0)$.

Le problème est qu'il n'y a pas de logarithme complexe. On pose $g(\theta) = f(\exp(i\theta))$.

On a $g(\theta+\varphi) = g(\theta)g(\varphi)$. En dérivant par rapport à φ , $g'(\theta) = \lambda g(\theta)$, où $\lambda = g'(0) = f'(1)$. Donc $g(\theta) = \exp(i\lambda\theta)$.

Il faut aussi que g soit 2π -périodique, donc $\lambda \in \mathbb{Z}$.

(*synthèse*) Les solutions sont les $g(\theta) = \exp(in\theta)$, avec $n \in \mathbb{Z}$, donc les $f(x) = x^n$, où $n \in \mathbb{Z}$.

6) Il existe M tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq M\lambda^{(2^n)}$, car toute suite en $O_{+\infty}(1)$ est bornée.

On a donc $u_n \leq \lambda \left(M + \sqrt{M + \sqrt{M + \dots + \sqrt{M}}} \right) = \lambda v_n$, où $v_0 = M$ et $v_{n+1} = M + \sqrt{v_n}$.

On montre que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge par le point fixe μ de $f(x) = M + \sqrt{x}$: faire un schéma, et noter que l'intervalle $[0, \mu]$ est stable par f et contient M , et que $f \geq \text{Id}$ sur cet intervalle.

Remarque : on vérifie par ailleurs que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante : en effet, on passe de u_n à u_{n+1} en remplaçant a_n par un terme plus grand qui est $a_n + \sqrt{a_{n+1}}$. On en déduit donc que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

7) a) Comme $\forall u > 0$, $\frac{u}{e^u - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u e^{-nu}$ et $\int_0^{+\infty} u e^{-u} = \frac{1}{n^2}$, alors par ITT, $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

b) Avec $t = 1 + \frac{u}{n}$, on a $J_n = \frac{1}{n^2} K_n$, où $K_n = \int_0^{+\infty} \frac{u}{(1 + u/n)^n - 1} du$.

On a par cv dominée $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = \int_0^{+\infty} \frac{u}{e^u - 1} du$, mais il faut trouver une fonction de domination !!!

On peut utiliser par le binôme $\left(1 + \frac{u}{n}\right)^3 \geq 1 + \binom{3}{1} \frac{u^3}{n^3} \geq 1 + \frac{u^3}{12}$ pour n assez grand.

Et $\varphi(u) = \frac{u}{1 + u^3/12}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

8) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{f(n)}$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{f(t)} dt$, car $\frac{1}{f}$ est décroissante positive.

Or, avec $t = f^{-1}(u)$, on a $\int_1^x \frac{1}{f(t)} dt = \left[\frac{t}{f(t)} \right]_1^x + \int_1^x \frac{t f'(t)}{f(t)^2} dt$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)} = 0$.

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{f(t)} dt$ converge ssi $\int_1^{+\infty} \frac{t f'(t)}{f(t)^2} dt$ converge.

Or, avec $u = f(t)$, on a $f'(t) dt = du$, donc on obtient $\int_1^{+\infty} \frac{t f'(t)}{f(t)^2} dt = \int_{f(1)}^{+\infty} \frac{f^{-1}(u)}{u^2} du$.

(par un changement de variable, on a l'égalité des intégrales impropres, convergentes ou non).

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{f(t)} dt$ converge ssi $u \mapsto \frac{f^{-1}(u)}{u^2} du$ est intégrable en $+\infty$.

9) On utilise la méthode de variation de la constante : on pose $u_n = (n!) v_n$.

On obtient $v_n - v_{n-1} = \frac{1}{n!}$, donc $u_n = (n!) \left(v_0 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \right)$.

Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(v_0 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \right) = 0$, donc $u_0 = v_0 = - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 1 - e$.

Dans ce cas, on a $u_n = (n!) \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \right)$.

Par l'inégalité de Taylor-Lagrange à exp sur $[0, 1]$, on a $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \right| \leq \frac{e}{(n+1)!}$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

10) a) E se partitionne en les points fixes de f et les paires de la forme $\{x, f(x)\}$, avec $f(x) \neq x$.

On choisit le nombre de paires $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, puis les paires (et ensuite, les autres points sont fixes).

Donc $I_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \binom{2k}{2} \binom{2k-2}{2} \dots \binom{2}{2} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(n!)}{(n-2k)!(2k)!} \frac{(2k)(2k-1)}{2} \dots \frac{2 \times 1}{2} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(n!)}{(n-2k)! 2^k}$.

Remarque : Il faut diviser par $k!$ car on choisit l'ensemble des k paires (et non les k -uplets de paires).

b) Une involution est une permutation (car $f^{-1} = f$). On a donc $I_n \leq n!$. D'où $R \geq 1$.

c) Pour construire une involution de E_{n+1} , il y a deux cas :

- si $f(n+1) = n+1$, on se ramène à construire une involution de E_n . Il y a I_n choix.

- si $f(n+1) = m \leq n$, on a $f(m) = n+1$, et on se ramène à construire une involution de $E_n \setminus \{m\}$.

Il y a n choix pour m , et m étant fixé, il y a I_{n-1} choix. Donc au total nI_{n-1} .

Donc $I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}$. d'où $(n+1)c_{n+1} = c_n + c_{n-1}$. On a $I_0 = 1$, donc $c_0 = 1$

D'où pour $|x| < R$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)c_{n+1}x^n = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n + c_{n-1})x^n = f(x) + xf(x)$.

On en conclut $f(x) = f(0) \exp\left(x + \frac{x^2}{2}\right) = \exp\left(x + \frac{x^2}{2}\right) = \exp(x) \exp\left(x + \frac{x^2}{2}\right)$.

Par produit de Cauchy de deux séries entières de rayon $+\infty$, on obtient $R = +\infty$.

$$\mathbf{11)} \quad \Gamma(1+h) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \exp(ht) dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} (\ln t)^n e^{-t} dt.$$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n e^{-t} dt$. Pour appliquer ITT, on va majorer $\int_0^{+\infty} |(\ln t)^n| e^{-t} dt$.

$$\text{Or, } \int_0^{+\infty} |(\ln t)^n| e^{-t} dt \leq \int_0^1 (-\ln t)^n dt + \int_1^{+\infty} t^n e^{-t} dt \leq n! + \Gamma(n+1) = 2n!$$

On en déduit que pour $|h| < 1$, la série $\sum \int_0^{+\infty} \frac{h^n}{n!} |(\ln t)^n| e^{-t} dt$ converge.

Donc par ITT, $\Gamma(1+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} c_n$ pour tout $|h| < 1$. D'où le résultat.

$$\mathbf{12)} \text{ a) Il existe } (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ telle que } \forall x \in]-1, 1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n.$$

Pour $|x| < 1$, on a $|tx| < 1$ pour tout $t \in [0, 1]$, donc $T(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} x^n$.

Ainsi, $T(f)$ est bien définie par une série entière, et la linéarité de T est immédiate.

b) Par identification des séries entières, on a $T(f) = \lambda f$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{c_n}{n+1} = \lambda c_n$.

On en déduit qu'il existe au plus un $p \in \mathbb{N}$ tel que $c_p \neq 0$, et dans ce cas, $\lambda = \frac{1}{p+1}$.

Donc les valeurs propres sont les $\lambda_p = \frac{1}{p+1}$, où $p \in \mathbb{N}$, et le sev propre est $E_{\lambda_p} = \mathbb{R}x^p$.

$\mathbf{13)} \text{ a) Pour } n \geq p$ assez grand, $u_n > 0$, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - 1 = 0$. Posons $\varepsilon_n = u_n - 1$.

Pour $n \geq p$, $A_n = \prod_{k=p}^n u_k = \exp\left(\sum_{k=p}^n \ln(1 + \varepsilon_k)\right)$. On a $\ln(1 + \varepsilon_n) = O(\varepsilon_n)$ et $\sum |\varepsilon_n|$ converge.

Donc $(\sum_{k=p}^n \ln(1 + \varepsilon_k))_{n \geq p}$ converge, et on conclut avec $\prod_{k=0}^n u_k = \alpha A_n$, où $\alpha = \prod_{k=0}^{p-1} u_k$

b) On a $\|S_n\| \leq \prod_{k=0}^n \|M_k\|$.

Or, $\| \|M_n\| - 1 \| \leq \|M_n - I_p\|$. Par a), $(\prod_{k=0}^n \|M_k\|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Donc $(\|S_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

D'autre part, $S_{n+1} - S_n = S_n(M_n - I_p)$, donc $\|S_{n+1} - S_n\| \leq \|S_n\| \|M_n - I_p\| = O(\|M_n - I_p\|)$.

Par comparaison, on en déduit que $\sum (S_{n+1} - S_n)$ converge absolument, donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.