

## Inégalités

- Inégalités usuelles : Taylor-Lagrange (et accroissements finis), Cauchy-Schwarz, convexité.

- Utilisations de DL pour la recherche d'équivalents (et de limites).

*Exemple 1* :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 2 \cos \left( \frac{n+1}{3n} \pi \right) \right)^n$  est de la forme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{\lambda}{n} + o \left( \frac{\lambda}{n} \right) \right)^n = e^\lambda$ .

*Exemple 2* : Par le DSE de cos et l'encadrement donné par le CSSA,  $\frac{1}{2} \leq \cos 1 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{24}$ .

- Inégalités locales via un DL : Si  $f$  est  $C^2$  et  $f(0) = f'(0) = 0$ , alors  $f(x) = O(x^2)$ .

- Intégration des inégalités. Comparaisons entre sommes et intégrales.

*Exemple 3* :  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t)} dt = \ln 2$  : on compare  $\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t)} dt$  avec  $\int_x^{2x} \frac{1}{t} dt = \ln 2$ .

- Existence de limites d'une suite : Pincement, pincement avec  $\varepsilon$  (si on connaît la limite) ;  
théorème de la limite monotone, étude de la série associée (si on ne connaît pas la limite).

- Preuves de type Cesàro : on coupe les sommes (ou intégrales) et on utilise le pincement avec  $\varepsilon$ .

◀ *Exo 1* : a) Montrer que si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-n} \left( \sum_{k=0}^n 2^k u_k \right) = 2L$ .

b) Montrer que si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k = L$ .

c) Montrer que si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = L$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f'(t) dt = L$ .

◀ *Exo 2* : *Evaluations d'intégrales par des intégrations par parties*

a) Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . Montrer que  $\int_0^1 f(t) t^n dt = \frac{f(1)}{n} + O \left( \frac{1}{n^2} \right)$ .

b) Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ . Montrer que  $\int_0^1 \cos(n\pi t) f(t) dt = O \left( \frac{1}{n^2} \right)$ .

c) Déterminer un équivalent de  $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$  lorsque  $x$  tend vers  $0^+$  et lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .

◀ *Exo 2 bis* : Soit  $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$  telle que  $f'' > 0$  et  $|f'| \geq 1$ . Montrer :  $\forall \lambda > 0, \left| \int_a^b \cos(\lambda f(x)) dx \right| \leq \frac{4}{\lambda}$ .

◀ *Exo 3* : Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n} \tan \left( \frac{1}{k} \right)$ .

◀ *Exo 4* : On suppose  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ . Montrer que si  $f$  et  $f''$  sont bornées, alors  $f'$  est bornée.

◀ *Exo 4 bis* : a) Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de classe  $C^2$  vérifiant  $\exists M, \forall n \in \mathbb{N}, \sup |f_n''| \leq M$ .

Montrer que si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup |f_n| = 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup |f_n'| = 0$ .

b) Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de classe  $C^3$  vérifiant  $\exists M, \forall n \in \mathbb{N}, \sup |f_n^{(3)}| \leq M$ .

Montrer que si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup |f_n| = 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup |f_n'| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup |f_n''| = 0$ .

◀ *Exo 5* : Soit  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ . En calculant  $\int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta$ , montrer que  $\sup_{|z|=1} |P(z)|^2 \geq \sum_{k=0}^n |a_k|^2$ .

## Suites définies implicitement par $f_n(x_n) = 0$

- Utilisation du th de la bijection pour l'existence et l'unicité ; utilisation du TVI pour localiser  $x_n$ .

Pour prouver  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lambda^+$ , on prouve que pour  $\varepsilon > 0$ ,  $f_n(\lambda)f_n(\lambda + \varepsilon) < 0$  pour  $n$  assez grand.

Pour prouver  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ , on prouve que pour tout  $M \in \mathbb{R}$ ,  $f_n(M) (\lim_{+\infty} f_n) < 0$  pour  $n$  assez grand.

- Méthodes par approximations successives.

◀ *Exo 6* : a) Montrer que l'équation  $x^n - 1 - x = 0$  admet une unique solution  $x_n \geq 1$ .

b) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$ , puis  $x_n = 1 + \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

◀ *Exo 7* : a) Montrer que l'équation  $xe^x = n$  admet une unique solution  $x_n > 0$  pour tout  $n \geq 1$ .

b) Déterminer un DA à deux termes de  $x_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

- On cherche des intervalles stables où  $f - \text{Id}$  est de signe constant :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est alors monotone.

- Utilisation de Cesàro dans les suites récurrentes  $u_{n+1} = f(u_n)$  à convergence lente ( $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 1$ ).

- Si  $f$  est croissante, alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone.

- Convergence exponentielle : si  $f(0) = 0$  et  $|f(x)| \leq k|x|$ , où  $0 \leq k < 1$ , alors  $u_n = O(k^n)$ .

*Exemple 4* : Convergence lente et Cesàro. On suppose  $x_{n+1} = f(x_n)$ , avec  $x_0 \in ]0, 1]$ .

On suppose  $f(0) = 0$  et  $0 < f(x) < x$  pour  $x \in ]0, 1]$  et  $f(x) = x - \lambda x^2 + o(x^2)$ , avec  $\lambda > 0$ .

Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0^+$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \right) = \lambda$ , donc  $x_n \sim \frac{1}{n\lambda}$ .

◀ *Exo 8* : On suppose  $x_{n+1} = x_n g(x_n)$ , avec  $g$  de classe  $C^1$ ,  $g(0) = 1$ ,  $g' < 0$  et  $g > 0$ .

Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$  et  $\sum x_n$  converge.

◀ *Exo 9* : On considère  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n}$ .

Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}$ .

### Topologie dans $\mathbb{R}$

- Théorème des valeurs intermédiaires (et localisation des zéros). Théorème de Rolle.

Formule de la moyenne : Si  $g \geq 0$ , alors il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $\int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt$ .

*Exemple 5* : Si  $f > 0$  et continue sur  $[a, b]$  et  $\theta \in [0, 1]$ , il existe un unique  $x$  tel que  $\int_a^x f(t) dt = \theta \int_a^b f(t) dt$ .

- Théorème de Weierstrass (les extremas sont atteints sur un segment (sur un compact)).

*Exemple* : Toute fonction continue sur  $\mathbb{R}^+$  ni majorée ni minorée admet une infinité de zéros.

- Partie dense dans  $\mathbb{R}$  :

*Exemple 6* : Si  $\inf(A \cap \mathbb{R}_+^*) = 0$  et si  $(\forall a \in A, \forall n \in \mathbb{Z}, na \in A)$ , alors  $A$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

En effet, pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon > 0$ , on approche  $x$  par un multiple de  $a$ , où  $a \in A$  vérifie  $0 < a \leq \varepsilon$ .

◀ *Exo 10* : Montrer que  $A = \{\sqrt{n} - \sqrt{m}, (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

◀ *Exo 11* : Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $\forall (x, y), f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$ . Montrer que  $f$  est convexe.

### Séries, intégrales

- Théorème de comparaisons pour les séries et intégrales à termes positifs.

- Séries et intégrales absolument convergentes. Th de Fubini pour les séries convergentes absolument.

- Séries alternées (critère spécial et majoration du reste). *Contre-exemple* :  $\sum \left( \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right)$  diverge.

- Utilisation d'un DL :

*Exemple 7* :  $\sum \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$  diverge car  $\ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \varepsilon_n$ , avec  $\varepsilon_n \sim \frac{1}{2n}$ .

- Application des séries pour prouver la convergence d'une suite :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge ssi  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  converge.

- Séries et intégrales semi-convergentes : CSSA, IPP (et transformation d'Abel pour les séries) :

*Exemple 8* :  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$  (preuve par IPP sur  $\int_\varepsilon^x \frac{\sin t}{t} dt$ ).

*Exemple 9* :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\exp(in\theta)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n(\theta)}{n(n+1)}$ , où  $(A_n(\theta))_{n \in \mathbb{N}} = (\sum_{k=1}^n e^{ik\theta})_{n \in \mathbb{N}}$  bornée pour  $\theta \neq 0 [2\pi]$ .

- Étude d'une intégrale par une série

*Exemple 10* :  $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\pi} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin t| dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n\pi} = +\infty$ .

*Exemple 11* :  $\int_0^1 \frac{1}{1 + [1/t]} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ .

- Critère de d'Alembert : Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L < 1$ , alors  $\sum u_n$  converge (cv infra-géométrique).

- Sommation des relations de comparaisons (hors-programme officiel) :

*Culturel* : Si  $f(x) \sim_{+\infty} g(x)$  et  $g \geq 0$  intégrable, alors  $\int_x^{+\infty} f(t) dt \sim \int_x^{+\infty} g(t) dt$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

◀ *Exo 12* : Montrer que la série  $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$  converge.

◀ *Exo 13* :

a) On suppose  $u_n > 0$  et  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Montrer qu'il existe  $\lambda$  tel que  $u_n \sim \lambda n^\alpha$ .

*Remarque* : On en déduit que  $\sum u_n$  converge ssi  $\alpha < -1$  (*critère de Raabe-Duhamel*).

b) Soit  $\alpha > 0$ . Montrer qu'il existe  $\lambda$  tel que  $\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1) \sim \lambda n^{\alpha-1} n!$ .

◀ *Exo 14* : On pose  $u_0 = u_1 = 1$  et  $u_{n+1} = u_n + \frac{u_{n-1}}{n^\alpha}$ , où  $\alpha > 0$ . Montrer :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge ssi  $\alpha > 1$ .

## Espaces vectoriels normés

- Normes, normes dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et notamment norme subordonnée à une norme de  $\mathbb{R}^n$ .

- Normes équivalentes, équivalence des normes en dim finie (et caractérisation de la limite par cv des coordonnées).

- Parties convexes, parties fermées ; la distance d'un point à un compact non vide est atteinte.

*Exemple 12* : Sur  $C^1([0, 1], \mathbb{R})$ , les normes  $\|f\|_\infty$  et  $N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt$  ne sont pas équivalentes.

En effet, avec  $f_n(t) = \sin(nt)$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} N(f_n) / \|f_n\|_\infty = +\infty$ .

◀ *Exo 15* : Une norme sur  $\mathbb{R}^2$ . On pose  $N(x, y) = \max(|x+y|, |2x-y|)$ . Représenter la boule unité.

◀ *Exo 16* : On pose  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $N(A) = \sup_{U \in O_n(\mathbb{R})} \text{tr}(AU)$ . Montrer que  $N$  est une norme.

## Suites et séries de fonctions

- Convergence uniforme, convergence normale. Continuité et dérivabilité.

*Exemple* : Toute fonction continue sur un segment est limite uniforme de fonctions en escaliers.

- Limite d'intégrales, intégration terme à terme d'une série de fonctions.

*Exemple 13* :  $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$  converge uniformément sur  $]0, +\infty[$ , mais ne converge pas normalement sur  $]0, +\infty[$ .

*Exemple 14* : Soit  $\alpha \geq 0$ .  $\sum x^n(1-x)^\alpha$  converge normalement sur tout segment  $[0, a]$ , avec  $a < 1$ .

$\sum x^n(1-x)^\alpha$  converge normalement sur  $[0, 1[$  ssi  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge, c'est-à-dire ssi  $\alpha > 1$ .

En effet, avec  $f_n(x) = x^n(1-x)^\alpha$ ,  $M_n = \sup_{x \in [0,1]} f_n = f_n(x_n)$ , avec  $x_n = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ , donc  $M_n \sim \frac{e^{-\alpha} \alpha^\alpha}{n^\alpha}$ .

◀ *Exo 17* : Soit  $a \in \mathbb{C}$  et  $|a| \neq r > 0$ . Calculer  $J = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a - re^{i\theta})}$ .

*Variante* : Calcul de  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a - re^{i\theta})(b - re^{i\theta})}$ . On décompose d'abord en éléments simples..

◀ *Exo 18* : Montrer que  $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \exp(-nt^2)$  est définie et de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

◀ *Exo 19* : On considère  $\forall x > 0$ ,  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+xn^2)}$ . Trouver un équivalent de  $f$  en  $0^+$  et en  $+\infty$ .

## Relations fonctionnelles

*Exemple 16* : Les fonctions continues vérifiant  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  sont LES fonctions  $x \mapsto ax$ .

On prouve d'abord qu'on a nécessairement  $f(ar) = rf(1)$  pour tout rationnel  $r$ .

*Remarque* : Lorsque  $f$  est  $C^1$ , la relation équivaut à  $f(0) = 0$  et  $f'(x+y) = f'(x)$ , c'est-à-dire  $f'$  constante.

*Variante* : Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et vérifie  $f(x+y) = f(x)f(y)$ , alors  $f = 0$  ou  $f(x) = \exp(ax)$ ,

En effet, on a  $f \geq 0$  car  $f(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)^2 \geq 0$ . Si  $f > 0$ , on pose  $g(x) = \ln f(x)$ .

Sinon, il existe  $x$  tel que  $f(x) = 0$ , et on a alors  $\forall y$ ,  $f(x+y) = 0$ , donc  $f$  est nulle.

*Exemple 17* : Si  $f$  continue vérifie  $f(2x) = f(x)$ , alors  $f$  est constante.

En effet,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(2^{-n}x) = f(0)$ .

◀ *Exo 20* : a) Déterminer les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable en 0 vérifiant  $f(2x) = 2f(x) + 1$ .

b) Déterminer les fonctions continues  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant  $f(x+y) = f(x)f(y)$ .

c) Déterminer les fonctions continues  $f : \mathbb{R} \rightarrow ]-1, 1[$  vérifiant  $f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)}$ .

d) (★) Déterminer les fonctions continues  $f : \mathbb{R} \rightarrow U \subset \mathbb{C}$  vérifiant  $f(x+y) = f(x)f(y)$ .

◀ *Exo 20 bis* : Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue vérifiant  $f(0) = f'(0) = f(1) = 0$  et  $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ .

Montrer que  $f$  est identiquement nulle.

◀ *Exo 21* : Soit  $0 \leq a < 1$ .

Montrer que  $f : x \mapsto \prod_{n=0}^{+\infty} (1 - a^n x)$  est l'unique fonction continue vérifiant  $f(0) = 1$  et  $f(x) = (1-x)f(ax)$ .

## Recherche d'équivalents dans les intégrales à paramètre

- Théorème de convergence dominée, th d'intégration terme à terme d'une série de fonctions

- Méthode de Laplace : il s'agit (par exemple) d'évaluer  $I_n = \int_I f(t)^n g(t) dt$  où  $0 \leq f(t) \leq 1$ .

Pour obtenir un équivalent, on utilise un changement de variable pour se ramener à une suite d'intégrales convergent vers une limite finie non nulle (par convergence dominée).

*Exemple 18* :  $I_n = \int_0^1 \left( \frac{1}{1+t^2} \right)^n dt = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left( \frac{1}{1+u^2/n} \right)^n dt \sim \frac{1}{\sqrt{n}} G$ , où  $G = \int_0^{+\infty} \exp(-u^2) du$ .

*Exemple 19* : Transformée de Laplace :  $L(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$ , avec  $f : [0, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[$  continue et bornée.

Avec  $u = tx$  : Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda \neq 0$ , alors  $f(x) \sim \frac{\lambda}{x}$  en  $x = 0^+$ . Si  $f(0) \neq 0$ , alors  $L(x) \sim_{+\infty} \frac{f(0)}{x}$ .

*Exemple* : Moments :  $I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$ , avec  $f$  bornée continue. Alors, avec  $u = t^n$ ,  $I_n \sim \frac{f(1)}{n}$ .

Ainsi,  $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+t^2} dt \sim \frac{1}{3n}$ . On utilise le changement de variable  $t = u^{1/n}$ , ou bien  $t = 1 - \frac{u}{n}$ .

◀ *Exo 22* : a) Déterminer un équivalent de  $I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x+x^2)^n} dx$ .

b) On pose  $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n} dt$ . Montrer que  $a_n \sim \frac{\lambda}{n^{1/3}}$  avec  $\lambda = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$ .

c) On pose  $J_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t}} dt$ . Montrer que  $J_n \sim \frac{\lambda}{\sqrt{n}}$ , avec  $\lambda = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ .

◀ *Exo 23* : On considère  $\forall x > 0$ ,  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$ .

a) Montrer que  $f$  est définie et continue sur  $]0, +\infty[$ .

b) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

◀ *Exo 24* : On considère  $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \arctan(t) dt$ . Montrer que  $f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2}$ .

## Recherche d'équivalents dans les séries de fonctions

Deux méthodes principales :

- Comparaisons avec une intégrale.

- Théorème de la double limite (interversion des limites).

Parfois aussi : majoration directe du reste par CSSA ou l'inégalité (ou formule) de Taylor-Lagrange.

◀ *Exo 25* : On considère  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$ .

a) Montrer que  $f$  est bien définie et continue.

b) Déterminer un équivalent de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $0^+$  et quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

◀ *Exo 26* : On pose  $\forall x > 0$ ,  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ .

Montrer que  $f$  est continue sur  $]0, +\infty[$  et déterminer un équivalent en  $+\infty$ .

◀ *Exo 27* : On considère  $f : [0, 1[ \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$ .

a) Montrer que  $f$  est bien définie et continue. *Indication* : Convergence normale sur  $[0, a]$ , pour tout  $a < 1$ .

b) Déterminer un équivalent de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $1^-$ .

◀ *Exo 28* : (★) Montrer que  $\sum \frac{e^{inx}}{n}$  converge uniformément sur tout  $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ , où  $0 < \varepsilon < 2\pi$ .

La convergence est-elle uniforme sur  $]0, 2\pi[$  ?

## Séries entières

- Rayon de convergence : On a  $R = \sup\{\rho \geq 0 \mid (a_n \rho^n) \text{ bornée}\}$ .

Si  $|z| < R$ , la série  $\sum a_n z^n$  converge absolument ; si  $|z| > R$ , la série diverge.

*Remarque* : Si  $\sum |a_n z_0^n|$  converge,  $R \geq |z_0|$ , si elle diverge,  $R \leq |z_0|$ .

*Exemple* : Si  $\sum a_n x^n$  est de rayon  $R$ , la série  $\sum a_n^2 x^n$  est de rayon  $R^2$  et  $\sum a_n x^{2n}$  est de rayon  $\sqrt{R}$ .

- Rayon de convergence des dérivées ; cv normale sur tout disque de rayon  $\rho < R$ .

- Théorèmes de comparaison : si  $a_n = O(B_n)$  alors  $R_a \geq R_b$  ; Critère de d'Alembert.

- DSE et ITT : Exemple :  $\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} u^{n-1}}{n} du = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}$ .

- DSE (en 0) et équations différentielles : raisonner par analyse-synthèse ( $R > 0$ ).

- Si  $R > 0$ , alors  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$  ; Formules de Cauchy :  $a_n = \frac{1}{2\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$ .

Deux séries entières qui coïncident au voisinage de 0 sont égales (mêmes dérivées en 0).

- DSE des fonctions (notamment DSE des fonctions usuelles).  $-\ln(1-x)$  ;  $(1+x)^\alpha$  et  $(1+x)^\alpha$ ,  $\exp(\lambda z)$ ,  $\arctan$ .

En particulier,  $\left(\frac{1}{1-x}\right)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ , avec  $c_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{n!}$ .

◀ *Exo 29* : a) Soient  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels positifs.

On note  $R$  et  $R'$  les rayons de cv de  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  et  $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{a_n} x^n$ . Exprimer  $R'$  en fonction de  $R$ .

b) On suppose que le rayon de convergence  $R$  de  $\sum a_n z^n$  vérifie  $0 < R < +\infty$ .

Déterminer le rayon de convergence de  $\sum a_n z^{(n^2)}$ .

◀ *Exo 30* : a) Montrer que le nombre  $d_n$  de dérangements (permutations sans point fixe) vérifie  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k = n!$

b) En utilisant  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$  de rayon  $\geq 1$ , en déduire  $f(x)e^x = \frac{1}{1-x}$ , d'où  $f(x) = \frac{1}{1-x} e^{-x}$ .

*Remarque* : On conclut  $d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ . On obtient donc  $d_n \sim \frac{n!}{e}$ .

◀ *Exo 31* :  $f(x) = \sqrt{1+x-x^2}$  est DSE en 0.

◀ *Exo 32* : Transformation d'Abel dans le cas des séries entières.

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  réelle décroissante telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$ . Donner lde rayon  $R$  de  $\sum a_n z^n$ .

En considérant  $\sum (a_n - a_{n+1})z^{n+1}$ , montrer que  $\sum a_n z^n$  converge ssi  $|z| \leq 1$  et  $z \neq 1$ .

◀ *Exo 33* : On considère  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$  et  $\forall n \geq 2$ ,  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ .

Déterminer le rayon de convergence  $R$  de  $\sum u_n z^n$ , et exprimer  $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$  par une fraction rationnelle.

◀ *Exo 34* : Montrer que  $\frac{x}{e^x - 1}$  est DSE et que les coefficients du DSE sont des nombres rationnels.

◀ *Exo 35* : On pose  $a_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2k}\right)$ . Montrer que  $\sum a_n x^n$  est de rayon  $R = 1$  et calculer  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ .

◀ *Exo 36* : Montrer que  $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$  est DSE sur  $] -1, 1[$ .

◀ *Exo 37* : On considère  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $a_0 = 0$  et  $a_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n+1} a_{n-1}$ .

a) Déterminer le rayon de convergence de  $\sum a_n x^n$ .

b) Pour  $|x| < R$ , calculer  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ .

## Equations et systèmes linéaires différentiels

- Equations d'ordre 1 : résolution du cas résolu par variation de la constante, raccordements dans le cas général.

*Exemple* :  $xy' = -y + e^x$  ; on obtient sur  $] -\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ ,  $S_H : y(x) = \frac{k}{x}$ , donc  $S : y(x) = \frac{e^x + k}{x}$ .

Le seul prolongement par continuité en 0 correspond à  $y(x) = \frac{e^x - 1}{x}$  (et  $\varphi$  est  $C^\infty$ , car DSE en 0).

- Utilisation des séries entières : On peut trouver les solutions DSE en 0 (on doit avoir  $R > 0$ ).

*Conseil* : Regrouper les termes par degré :  $y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$  et  $xy'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n$ .

- Équation différentielle discrète : Si  $u_{n+1} - 2u_n = \omega_n$ .

On obtient  $v_{n+1} - v_n = 2^{-n}\omega_n$  en posant  $u_n = 2^n v_n$  (méthode de variation de la constante).

◀ *Exo 38* : On suppose  $\lim_{+\infty}(f' + f) = 1$ . Montrer que  $f$  converge en  $+\infty$  et déterminer sa limite.

*Variante* : Même question en supposant cette fois  $\lim_{+\infty}(f'' + 2f' + f) = 1$ . Poser  $g = f + f'$ .

◀ *Exo 39* : On suppose  $\lim_{n \rightarrow +\infty}(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n) = 1$ . Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et déterminer sa limite.

## Fonctions de plusieurs variables et calcul différentiel

- Fonctions continues, caractérisation séquentielle.

- Fonctions de classe  $C^1$  : Les dérivées partielles sont continues.

*Exemple* :  $F(x, y) = \int_I f(t, x, y) dt$ . On a (via les intégrales paramétrées) :  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, y) dt$ .

On prouve ensuite la continuité de  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$  par la caractérisation séquentielle + cv dominée.

- Dérivée le long d'un chemin :  $\frac{d}{dt}(f(x_1(t), \dots, x_n(t))) = \sum_{i=1}^n x'_i(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \text{grad } f(X(t)) \cdot X'(t)$ .

- DL2 pour une fonction  $C^2$  :  $f(X) = f(0) + \text{grad } f(0) \cdot X + \frac{1}{2}X^T H X + o(\|X\|^2)$ ,

où  $\text{grad } f(X_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$  et  $H = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in S_n(\mathbb{R})$ .

- EDP : On se ramène par changements de variables (affine ou polaire) à des cas simples.

- Extremas : Pour  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $A \subset \mathbb{R}^n$  : Si  $x$  extremum local et intérieur à  $A$ , alors  $\text{grad } f(x) = \vec{0}$ .

Recherche des extremas : On prouve l'existence en se ramenant à un compact  $K$  : en prenant  $K = \{x \in A \mid f(x) \leq f(x_0)\}$  on a  $\sup f = \sup_K f$ . Il suffit de choisir  $x_0$  de sorte que  $K$  compact non vide.

On obtient ensuite des candidats éventuels avec les points critiques (à l'intérieur de  $A$ ) et étude de  $f$  sur la frontière de  $A$ . On en déduit les extrema en comparant les valeurs obtenues.

*Exemple 16* :  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$ . On utilise le changement de variables affine  $(x, y) = (u, -2u + v)$  :

Avec  $g(u, v) = f(u, -2u + v)$ , on a  $\frac{\partial g}{\partial u}(x, y) = g(u, v)$ , donc  $g(u, v) = \varphi(v)e^u$ , d'où  $f(x, y) = \varphi(y + 2x)e^x$ .

*Exemple 17* : Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . Alors  $f$  est constante ssi  $\forall i, \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ .

En effet, on utilise la formule fondamentale  $f(x) = f(0) + \int_0^1 \nabla f(tx) \cdot x dt$  pour prouver le sens direct.

*Corollaire* : Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ . Alors  $f$  est affine ssi  $\forall(i, j), \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0$ .

On utilise la propriété précédente aux dérivées partielles (qui sont de gradient nul, donc constantes).

◀ *Exo 40* : Déterminer les extrema de la fonction  $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{32}{xy}$  sur  $\Delta = ]0, +\infty[^2$ .

◀ *Exo 40 bis* : On considère  $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  sur  $\Delta = ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ .

Déterminer les points critiques et préciser si ce sont des extrema locaux stricts.

◀ *Exo 41* : Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} (x, y) \mapsto f(x, y)$  de classe  $C^2$ . Soient  $a$  et  $b \in \mathbb{R}$ .

Résoudre  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \beta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ , en supposant  $X^2 + \alpha X + \beta = (X - a)(X - b)$  scindé sur  $\mathbb{R}$ .

◀ *Exo 42* : Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(x)$  de classe  $C^2$ .

On considère  $g(y) = f(u(y))$ , où  $u$  est linéaire. Exprimer  $\nabla g$  et  $H_g$  en fonction de  $\nabla f$  et  $H_f$ .

◀ *Exo 42 bis* : Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(x)$  de classe  $C^2$ . Soit  $F$  un sev de  $\mathbb{R}^n$  de dim  $p$ .

On suppose  $\nabla f(0) = \vec{0}$  et  $\text{Im } H_f(x) \in F$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .

a) Montrer que  $\nabla f(x) \in F$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .

b) Montrer que  $f(x)$  ne dépend que de  $p(x)$  projeté orthogonal de  $x$  sur  $F$ .