Algèbre générale. Corrigé

Algèbre générale : arithmétique, nombres complexes, polynômes

◀ *Exo 1* : Les points (distincts) d'affixes a, b, c forment un triangle équilatéral ssi $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3}$ ou $\frac{c-a}{b-a} = e^{-i\pi/3}$.

Or, ($x = e^{i\pi/3}$ ou $x = e^{-i\pi/3}$) ssi x racine de $(x^2 - x + 1)$.

Donc a, b, c forment un triangle équilatéral ssi $\left(\frac{c-a}{b-a}\right)^2 - \left(\frac{c-a}{b-a}\right) + 1 = 0$.

En développant, on obtient la CNS $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$.

Autre preuve : a, b, c équilatéral ssi il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que $a = \lambda + \alpha$, $b = \lambda + \alpha j$ et $c = \lambda + \alpha j^2$.

Donc ssi a, b, c sont les racines d'un polynôme de la forme $(X - \lambda)^3 = \alpha^3$.

Donc (cf relations entre coefficients et racines) ssi il existe λ tel que $a + b + c = 3\lambda$ et $ab + ac + bc = 3\lambda^2$.

D'où la CNS : $(a + b + c)^2 = 3(ab + ac + bc)$, et on retrouve bien $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$.

◀ *Exo 2* : Notons $a_1, ..., a_r$ les racines de P, et $m_1, ..., m_r$ leurs ordres de multiplicité.

Sur $\mathbb{C}$, P est scindé, donc $\sum_{i=1}^r m_i = n$.

Le nombre de racines communes à P et P' est $\sum_{i=1}^r (m_i - 1)$. C'est donc le degré de pgcd(P, P').

Donc P' divise P ssi $\sum_{i=1}^r (m_i - 1) = n - 1$, c'est-à-dire $r = 1$.

Réciproque immédiate. Les solutions sont donc les $P(X) = \lambda(X - a)^n$.

◀ *Exo 3* : Supposons $P(X)P(X - 1) = P(X^2)$ avec P non nul. Alors P est unitaire.

Si z est racine de P, alors z^2 est racine. On en déduit que que $|z| = 0$ ou 1.

En effet, sinon, il y a aurait une infinité de ra cines (les $z^{(2^n)}$ érant alors distincts).

De même, si z est racine, $(z + 1)^2$ aussi.

0 ne peut être racine, car sinon, 1 puis 2^2 seraient racines, ce qui est absurde.

Donc $|z| = |z + 1| = 1$, et on en déduit (intersection de cercles) $z \in \{e^{i2\pi/3}, e^{-2i\pi/3}\}$.

Comme P est réel, les deux racines conjuguées ont même ordre de multiplicité. Et P est unitaire (car $\lambda^2 = \lambda$ implique $\lambda = 1$). Donc $P = (X^2 + X + 1)^m$, avec $m \in \mathbb{N}$. Réciproque par calcul direct.

◀ *Exo 4* : Posons $A(X) = (X + 1)^n - (X - 1)^n$.

On a z racine de A ssi $z \neq 1$ et $\dfrac{z+1}{z-1} = e^{i\theta}$, avec $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ (avc $0 \leq k < n$).

On at $\dfrac{z+1}{z-1} = e^{i\theta}$ ssi $z = \dfrac{e^{i\theta} + 1}{e^{i\theta} - 1} = \dfrac{\cos(\theta/2)}{i \sin(\theta/2)}$.

Les racines de A sont donc $z_k = \dfrac{\cos(k\pi/n)}{i \sin(k\pi/n)}$, avec $0 < k < n$ (on exclut $k = 0$).

Or, A est de degré $(n - 1)$ et de coefficient dominant $2n$.

On en déduit que A est scindé à racines simples et $A(X) = 2n \prod_{k=1}^{n-1} (X - z_k)$.

◀ *Exo 5* : a) Supposons $\exists\, v,\ w = v \circ u$. Alors $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} w$.

Réciproquement, supposons $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} w$.

Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E. On a $S \oplus \operatorname{Ker} u = E$.

On sait que $\widehat{u} : S \to \operatorname{Im} u \quad x \longmapsto u(x)$ est un isomorphisme.

On considère alors v définie par $\forall y \in \operatorname{Im} u,\ v(y) = (\widehat{u})^{-1}(y) \in E$.

On choisit v arbitrairement sur un supplémentaire de $\operatorname{Im} u$. Ce qui définit v complètement.

Montrons qu'on a bien $w = v \circ u$:

En effet, si $x \in S$, $u(x) = \widehat{u}(x) \in \operatorname{Im} u$, donc $v(u(x)) = w(x)$, car $(\widehat{u})^{-1}(u(x)) = x$.

Et si $x \in \operatorname{Ker} u$, on a $u(x) = 0$ et $w(x) = 0$, donc $v(u(x)) = w(x)$.

Les applications linéaires $v \circ u$ et w coïncident sur S et $\operatorname{Ker} u$, donc sont égales, car $S \oplus \operatorname{Ker} u = E$.

Variante : On définit v à partir d'une base $\mathcal{B}$ de $\operatorname{Im} u$, en prenant $\forall e \in \mathcal{B},\ v(e) = (\widehat{u})^{-1}(e) \in E$.

On complète alors $\mathcal{B}$ est une base de F, et on définit v sur les nouveaux vecteurs arbitrairement.

Deux fonctions linéaires qui coïncident sur une base sont égales, donc$v \circ u = w$.

Variante matricielle : On considère $\mathcal{B}$ base de E adaptée à $S \oplus \operatorname{Ker} u = E$, $\mathcal{C}$ base de F adaptée à $\operatorname{Im} u \oplus T = E$ et $\mathcal{D}$ base de F.

On a $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\, u = \left(\begin{array}{c|c} M & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$, avec M inversible, et $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}\, w = \left(\begin{array}{c|c} N & O \end{array}\right)$.

On cherche $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}\, v = \left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right)$ telle que $\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} M & O \\ \hline O & O \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} N & O \end{array}\right)$.

On prend $A = NM^{-1}$ et B arbitraire.

Remarque : L'idée est par un choix des bases $\mathcal{B}$ et C, on se ramène au cas où u est inversible.

b) Supposons $\exists\, u,\ w = v \circ u$. Alors $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Im} v$.

Réciproquement, supposons $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Im} v$.

On considère $(e_j)_{j \in I}$ une base de E.

Pour tout j, on a $w(e_j) \in \operatorname{Im} w \subset \operatorname{Im} v.$, donc il existe f_j tel que $v(f_j) = w(e_j)$.

On définit u linéaire par $u(e_j) = f_j$ pour tout J.

On a bien $w(e_j) = (v \circ u)\,(e_j)$ pour les $e\,\{j\}$ donc par linéarité, $w = v \circ u$.

◀ *Exo 6* : a) On a $AE_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} E_{kj}$. On considère la matrice de u dans la base $(E_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ pris dans un ordre judicieux de sorte que la matrice de u soit une matrice diagonale par blocs où tous les blocs sont égaux à la matrice A. Il suffit de classer les E_{ij} de sorte que les ceux qui ont le même j soient consécutifs : $\mathcal{B} = (E_{k,1})_{1 \leq k \leq n} \bigcup (E_{k,2})_{1 \leq k \leq n} \bigcup \dots \bigcup (E_{k,n})_{1 \leq k \leq n}$.

b) On a $u = w \circ v$ où $\omega : M \longmapsto M \longmapsto MB$.

En effet, $E_{ij}A = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}E_{ik}$. On obtient alors dans une base adéquate la matrice de u diagonale par blocs où tous les blocs sont égaux à la matrice B^T. Donc $\det w = (\det B^T)^n = (\det B)^n$.

On vérifie de façon analogue au a) que $\det w = (\det B)^n$, donc $\det u = \det w \times \det v = (\det A \det B)^n$.

◀ *Exo 7* : Il s'agit ici de l'interpolation d'Hermite (variante de l'interpolation de Lagrange).

L'idée consiste en fait à prouver que $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4 \quad P \longmapsto (P(a), P(b), P'(a), P'(b))$ est bijective.

Or, u est linéaire et injective, onc bijective par dimension, car $\dim \mathbb{R}_3[X] = \dim \mathbb{R}^4$.

Montrons que u est injective : Si $u(P) = 0$, alors a et b sont racines de P d'ordre ≥ 2, donc $P = 0$ (car $\deg P \leq 3$).

◀ *Exo 8* : On a $\mathrm{tr}\,(\sum_{i=1}^{r} p_i) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{Id}) = n$. Comme $\mathrm{rg}(p_i) = \mathrm{tr}(p_i)$.Donc $\sum_{i=1}^{r} \mathrm{rg}\, p_i = n$.

On a $\sum_{i=1}^{r} p_i = \mathrm{Id}$, donc a fortiori $\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Im}\, p_i = E$.

Mais on a $\sum_{i=1}^{r} \mathrm{rg}\, p_i = n$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{r} \dim(\mathrm{Im}\, p_i) = \dim E$.

On en déduit $\oplus_{i=1}^{r} \mathrm{Im}\, p_i = E$.

Soit $x \in E$, on a $x = \sum_{i=1}^{r} p_i(x)$ est la décomposition de x dans $\oplus_{i=1}^{r} \mathrm{Im}\, p_i$

Donc $p_i(x)$ est le projeté de x sur $\mathrm{Im}\, p_i$ parallèlement à $\oplus_{j \neq i} \mathrm{Im}\, p_j$.

Donc $\mathrm{Im}\, p_j \subset \mathrm{Im}\, p_i$ pour tout $i \neq j$, donc $p_i \circ p_j = 0$.

Réduction des endomorphismes

◀ *Exo 1* : On a $u^k(M) = A^k M$, donc pour tout polynôme $P(X)$, on a $P(u)(M) = P(A)M$.

Donc $P(u) = 0$ ssi $P(A) = O_n$. Donc u et A ont les mêmes polynômes annulateurs. D'où le résultat.

Lorsque $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ est diagonale, on a $AE_{ij} = \lambda_j E_{ij}$. Ainsi, (E_{ij}) est une base de vecteurs propres de u. Les valeurs propres de u sont les λ_i et les dimensions des sev propres sont multipliées par n.

On en déduit que lorsque $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, a = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, les m_{ij} définis par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, m_{ij} = E_{ij}$ forment une base de vecteurs propres de $u : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E) \quad m \longmapsto a \circ m$.

◀ *Exo 1 bis)* : On utilise le même principe qu'au 1). Il existe $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, a = T$ triangulaire supérieure.

On considère les m_{ij} définis par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, m_{ij} = E_{ij}$. On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, m_{ij} = TE_{ij} + E_{ij}T = \sum_{k=1}^{i} t_{ki}E_{kj} + \sum_{k=j}^{n} t_{jk}E_{ik}$.

Dans la base des E_{ij} bien ordonnés, la matrice de u est triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont les $\lambda_i + \lambda_j$, où les $\lambda_i \in \mathrm{Sp}(A)$ sont les coefficients diagonaux de T.

On en déduit que u est inversible ssi $\forall (i,j)$, $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$, donc ssi $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(-A) = \emptyset$.

◀ *Exo 2* : Le polynôme $P(x) = x^3 - x - 1$ annule A.

On vérifie (par une étude de fonctions) que P admet une unique racine réelle α, et que $\alpha > 0$.

Donc P admet dans $\mathbb{C}$ des racines $\alpha, \beta, \overline{\beta}$, avec β non réel, et donc P est scindé à racines simples.

Donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, et est semblable à une matrice $\mathrm{Diag}(\alpha, ..., \alpha, \beta, ..., \beta, \overline{\beta}, ..., \overline{\beta})$.

Comme A est réel, le polynôme caractéristique de A est réel, donc il y a autant de β que de $\overline{\beta}$.

On en déduit que $\det A = \alpha^p(\beta\overline{\beta})^q = \alpha^p\,|\beta|^{2p} > 0$.

◂ *Exo 3* : On a $p^2 = p$ et $q^2 = q$.

On a $p+q$ projecteur ssi $(p+q)^2 = p+q$, donc ssi $p\circ q + q\circ p = 0$.

Supposons $p+q$ projecteur. On a $p\circ q + q\circ p = 0$.

En compoosant par p, $p\circ q + p\circ q\circ p = 0$, c'est-à-dire $p\circ q\circ(p+\mathrm{Id})$.

Or, $p+\mathrm{Id}$ inversible (valeurs propres 1 et 2), donc $p\circ q = 0$, et ainsi $q\circ p = 0$.

Si $p\circ q = q\circ p = 0$, alors $p+q$ projecteur.

De plus, p et q commute, donc sont codiagonalisables (car $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ stables par q).

On en déduit qu'il existe une base de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, p = \left(\begin{array}{c|c|c} I & & \\ \hline & O & \\ & & O \end{array}\right)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, q = \left(\begin{array}{c|c|c} O & & \\ \hline & I & \\ & & O \end{array}\right)$.

On en conclut que $p+q$ est la projection sur $(\operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q)$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

◂ *Exo 4* : On note u l'endomorphisme canoniquement associé à u.

On a A semblable à une matrice dont les $(n-1)$ premières colonnes sont nulles.

On peut en conclure aisément a).

Supposons désormais $\operatorname{tr} A = 0$. Justifier que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$, puis une base (e_{n-1}) de $\operatorname{Im} u$, complétée en une base $(e_1..., e_{n-1})$ de $\operatorname{Ker} u$. On complète avec $e_n = u(e_{n-1})$.

◂ *Exo 5* : b) On note que $\operatorname{rg}(A-\lambda I_n) \geq n-1$ (car les $n-1$ dernières colonnes de $A-\lambda I_n$ sont indépendantes).

Donc $\dim E_\lambda \leq 1$ pour tout λ.

Donc A est diagonalisable ssi A admet n valeurs propres distinctes, donc ssi χ_A scindé à racines simples.

◂ *Exo 6* : a) Si A diagonalisable, alors A^2 diagonalisable (dans la même base).

Réicproquement, supposons A^2 diagonalisable.

Ainsi, $P(X) = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A^2)}(X-\lambda)$ annule A^2,c'est-à-dire $\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A^2)}(A^2-\lambda I) = O$.

Donc $Q(X) = P(X^2) = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A^2)}(X^2-\lambda)$ annule A.

Or, A et donc A^2 sont inversibles, donc les $\lambda\in\mathrm{Sp}(A^2)$ sont non nuls.

Tout $\lambda\in\mathbb{C}$ non nul, admet deux racines carrées μ et $-\mu$ distinctes.

Donc Q est scindé à racines simples, et ainsi, A est diagonalisable.

Remarque : Faux si A n'est pas inversible. Contre-exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Autre solution : A et A^2 commute, donc les sev propres de A^2 sont stables par A.

Dans une base adaptée, on a donc

$$A^2 = P\left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 I & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & \lambda_r I \end{array}\right)P^{-1} \text{ et } A = P\left(\begin{array}{c|c|c} B_1 & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & B_r \end{array}\right)P^{-1}$$

Sur chaque sev propre E_{λ_j} de A^2, on a donc $(B_j)^2 = \lambda_j I$.

Comme λ_j non nul, alors $X^2 - \lambda_j$ scindé à racines simples, donc B_j diagonalisable.

Donc A diagonalisable.

b) Le sens direct est simple à vérifier (on se ramène au cas où A est diagonale).

Réciproquement supposons A^2 diagonalisable et $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^2$.

Notons $\Delta = \{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$ l'ensemble des valeurs propres non nulles de A^2.

On a donc $\operatorname{Ker}(A^2) \oplus \operatorname{Ker}(A^2 - \lambda_1 I) \oplus \operatorname{Ker}(A^2 - \lambda_2 I) \oplus ... \oplus \operatorname{Ker}(A^2 - \lambda_r I) = E$.

Or, si on note μ_j et $-\mu_j$ les racines carrées de λ_j, on a $\operatorname{Ker}(A^2 - \lambda_j I) = \operatorname{Ker}(A^2 - \mu_j I) \oplus \operatorname{Ker}(A^2 + \mu_j I)$.

En effet, sur $F = \operatorname{Ker}(A^2 - \lambda_j I)$, on a $a^2 = \lambda_j \operatorname{Id}$, donc a diagonalisable de valeurs propres λ_j et $-\lambda_j$.

Comme $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^2$, alors $\operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Ker}(A - \mu_1 I) \oplus \operatorname{Ker}(A + \mu_1 I) \oplus ... = E$.

Donc A diagonalisable.

Autre solution (conseillée) : On utilise comme au a) le fait que les sev propres E_λ de A^3 sont stables par A. Comme $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^2$, il existe un changement de base tel que

$$A^2 = P \left(\begin{array}{c|c|c|c} O & & & \\ \hline & \lambda_1 I & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & \lambda_r I \end{array} \right) P^{-1} \text{ et } A = P \left(\begin{array}{c|c|c|c} O & & & \\ \hline & B_1 & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & B_r \end{array} \right) P^{-1}$$

On a alors $(B_j)^2 = \lambda_j I$, avec λ_j non nul, donc B_j diagonalisable. Donc A diagonalisable.

c) Supposons A antisymétrique. Alors A^2 est symétrique réelle, donc diagonalisable.

Or, $A^2 = -A^T A$, donc $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^2$ (car $(X \mid A^2 X) = -\|AX\|^2$ implique $\operatorname{Ker} A^2 \subset \operatorname{Ker} A$).

On conclut par b) que A est diagonalisable..

De plus, les valeurs propres de $A^2 = -A^T A$ sont dans $\mathbb{R}^-$, donc celles de A dans $i\mathbb{R}$.

d) Le rang de A diagonalisable est le nombre de racines non nulles de χ_A.

Or, par c), A est diagonalisable et les valeurs propres de A non nulles sont non réelles, donc les valeurs propres non nulles sont deux à deux conjuguées (car χ_A réel). Donc $\operatorname{rg} A$ pair.

Remarque : La relation $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $(X \mid AX) = 0$ prouve que 0 est la seule racine réelle éventuelle.

Autre solution : Soit A antisymétrique. On considère une BON de $\mathbb{R}^n$ adaptée à $\operatorname{Ker} A \oplus (\operatorname{Ker} A)^\perp = \mathbb{R}^n$.

On se ramène alors au cas où $A = U \left(\begin{array}{c|c} O & C \\ \hline O & B \end{array} \right) U^T$, où $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, avec $r = \operatorname{rg} A$

Or, $\left(\begin{array}{c|c} O & C \\ \hline O & B \end{array} \right)$ est antisymétrique (comme A), donc $C = O$.

On en déduit que $A = U \left(\begin{array}{c|c} O & C \\ \hline O & B \end{array} \right) U^T$, que $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = r$ et donc B est inversible.

Donc $\det B \neq 0$. Or, $\det B = \det(B^T) = \det(-B) = (-1)^r \det B$, et donc r pair.

◀ *Exo 7* : a) On a $M^k = \left(\begin{array}{c|c} A^k & * \\ \hline O & B^k \end{array} \right)$, donc pour tout polynôme P, on a $P(M) = \left(\begin{array}{c|c} P(A) & * \\ \hline O & P(B) \end{array} \right)$.

Donc tout polynôme annulateur (scindé à racines simples) de M annule A et B.

Ainsi, si M diagonalisable, alors A et B diagonalisables.

b) On peut remarquer que $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(A) \cup \mathrm{Sp}(B)$, car $\chi_M = \chi_A \chi_B$.

Remarque : On en déduit que M est diagonalisable ssi le polynôme $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \cup \mathrm{Sp}(B)} (X - \lambda)$ annule M.

On note que si $P(A) = O_n$ et $Q(B) = O_p$, alors

$$(PQ)(M) = P(M)Q(M) = \left(\begin{array}{c|c} O & * \\ \hline O & * \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline O & O \end{array}\right) = O_{n+p}$$

On prend alors $P(X) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)$ et $Q(X) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(B)} (X - \lambda)$. On a donc $(PQ)(M) = O$.

Comme $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$, alors PQ est scindé à racines simples, donc M est diagonalisable.

Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O & B \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{C})$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

◂ *Exo 7 bis* : a) On a $M^k = \left(\begin{array}{c|c} A^k & kA^k \\ \hline O & A^k \end{array}\right)$, donc par linéarité $P(M) = \left(\begin{array}{c|c} P(A) & AP'(A) \\ \hline O & P(A) \end{array}\right)$.

b) Il existe P scindé à racines simples tel que $P(M) = O$. Alors $P(A) = O$ et $AP'(A) = O$. Les vp de A sont racines de P, donc ne peuvent être racines de P'. Donc $P'(A)$ inversible, et ainsi $A = O_n$.

◂ *Exo 8* : a) Posons $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$, donc $\chi_A(B) = \prod_{i=1}^r (B - \lambda_i \,\mathrm{Id})^{m_i}$.

$\chi_A(B)$ est inversible ssi $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\det((B - \lambda_i \,\mathrm{Id}) \neq 0$, donc ssi $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\lambda_i \notin \mathrm{Sp}(B)$.

Or, les λ_i sont exactement les valeurs propres de A.

b) Supposons $AM = MB$. On a alors $AM = MB$, donc $A^k M = MB^k$, donc $\chi_A(A)\ M = M\ \chi_A(B)$.

Comme $\chi_A(A) = O$, alors $M\ \chi_A(B) = O$.

Si $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$, alors $\chi_A(B)$ est inversible, donc $M = O_n$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B)$.

On veut montrer qu'il existe M non nulle telle que $AM = MB$.

En fait, $AM = MB$ ssi $(A - \lambda I)M = M(B - \lambda I)$, donc on se ramène au cas où $\lambda = 0$.

Ainsi, on suppose $0 \in \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B)$, c'est-à-dire A et B non inversibles.

On construit alors M non nulle (par exemple de rang 1) telle que $\mathrm{Im}\, B \subset \mathrm{Ker}\, M$ et $\mathrm{Im}\, M \subset \mathrm{Ker}\, A$.

Plus précisement, dans des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ respectivement adaptées à $\mathrm{Im}\, B \oplus S$ et $\mathrm{Ker}\, A \oplus T$, on choisit l'endomorphisme m de sorte que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \left(\begin{array}{c|c} O & P \\ \hline O & O \end{array}\right)$, avec P arbitraire non nulle.

Et alors M est la matrice de m dans les bases canoniques.

Autre solution pour la réciproque ; on note λ une valeur propre commune de A et de B (et donc de B^T, car B et B^T ont même polynôme caractéristique). Il existe X et Y vecteurs propres de A et B^T associés à la valeur propre λ, c'est-à-dire $AX = \lambda X$ et $Y^T B = \lambda Y^T$.

On a alors $AXY^T = \lambda XY^T = XY^T B$.

De plus, XY^T est non nulle (matrice de rang 1).

c) Par dimension, u est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ssi u injectif, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}\, u = \{0\}$.

◂ *Exo 9* : a) On a $P(v)(M) = P(A)M$.

Donc $P(v) = 0$ ssi $P(A) = 0$. On conclut avec la caractérisation via les polynômes annulateurs scindés à racines simples.

b) On suppose d'abord A triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

On a $AE_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}E_{kj} = \sum_{k=1}^{i} a_{ki}E_{kj}$ car $a_{ki} = 0$ pour $k > i$.

La matrice de u dans la base $(E_{11}, ..., E_{1n}, ..., E_{n1}, ..., E_{nn})$ est triangulaire supérieure.

Ses coefficients diagonaux sont $\lambda_1, ..., \lambda_n$ répétés n fois. D'où le résultat.

Dans le cas général, on considère une base $\mathcal{B}$ de trigonalisation de A, et on se place dans la base $(M_{11}, ..., M_{1n}, ..., M_{n1}, ..., M_{nn})$, où M_{ij} est la matrice dans la base canonique de l'endomorphisme dont la matrice est E_{ij}. On a en effet à $M_{ij} = \sum_{k=1}^{i} a'_{ki}M_{kj}$, où $A' = PAP^{-1}$.

c) On note v et w commutent et $(v \circ w)(M) = AMB$.

Par le binôme; $u^m = (v - w)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} v^k w^{m-k}$.

Comme v et w sont nilpotentes en dim n, on a $v^n = w^n = O$.

On prend donc $m \geq 2n - 1$. On a alors $\forall k \in [\![0, m]\!]$, $k \geq n$ ou $n - k \geq n$. Donc $u^m = 0$.

d) On a $E_{ij} = E_i E_j^T \in \text{Vect}(X_i Y_j^T)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ car $E_i \in \text{Vect}(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $E_j^T \in \text{Vect}(Y_j^T)_{1 \leq j \leq n}$.

e) B^T est aussi diagonalisable.

Si $AX_i = \lambda_i X_i$ et $B^T Y_j = \mu_j Y_j$, alors $w(X_i Y_j^T) = (\lambda_i - \mu_j) X_i Y_j^T$. D'où une base de vecteurs propres.

◄ *Exo 10* :

Première méthode : On se ramène au cas où B est diagonale.

Il existe $P = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \in GL_2(K)$ tel que $P^{-1} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ diagonale.

On passe alors aux produits par blocs (mêmes types d'opérations lors des produits de matrices).

Par exemple, on a $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + c\lambda & * \\ * & * \end{pmatrix}$,

d'où de même $\left(\begin{array}{c|c} aA & cA \\ \hline bA & dA \end{array}\right) \begin{pmatrix} \alpha I & \gamma I \\ \beta I & \delta I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a\alpha + c\lambda)A & * \\ * & * \end{pmatrix}$.

On en déduit $\begin{pmatrix} \alpha I & \gamma I \\ \beta I & \delta I \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{array}{c|c} aA & cA \\ \hline bA & dA \end{array}\right) \begin{pmatrix} \alpha I & \gamma I \\ \beta I & \delta I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A & 0 \\ 0 & \mu A \end{pmatrix}$.

Comme A diagonalisable, alors $\begin{pmatrix} \lambda A & 0 \\ 0 & \mu A \end{pmatrix}$ diagonalisable, donc M diagonalisable.

Remarque : Si on note $B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $M = B \otimes A = \left(\begin{array}{c|c} aA & cA \\ \hline bA & dA \end{array}\right)$ le produit tensoriel,

on a $\boxed{(P \otimes A)(Q \otimes A) = (PQ) \otimes A}$, et en particulier, $(P \otimes A)^{-1} = (P^{-1} \otimes A)$.

Ici, avec $P^{-1}BP = D$, on a $(P \otimes A)^{-1}(B \otimes A)^{-1}(P \otimes A) = (P^{-1}BP) \otimes A = D \otimes A$.

Seconde méthode : On se ramène au cas où A est diagonale.

Il existe $P \in GL_n(K)$ telle que $P^{-1}AP = D = \text{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ diagonale.

On pose $Q = \left(\begin{array}{c|c} P & O_n \\ \hline O_n & P \end{array}\right)$. On a $Q^{-1}MQ = \left(\begin{array}{c|c} aD & cD \\ \hline bD & dD \end{array}\right)$.

En se plaçant dans la base $(e_1, e_{n+1}, e_2, e_{n+2}, ..., e_n, e_{2n})$, on obtient $Q^{-1}MQ$ semblable à une matrice diagonale par blocs où chaque bloc diagonal est une matrice de la forme λB, donc diagonalisable.

Par exemple, si $D = \text{Diag}(\lambda, \mu)$, $\begin{pmatrix} \lambda a & & \mu c & \\ & \mu a & & \mu c \\ \lambda b & & \lambda d & \\ & \mu b & & \mu d \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda c & & \\ \lambda b & \lambda d & & \\ & & \mu a & \mu c \\ & & \mu b & \mu d \end{pmatrix}$.

Algèbre bilinéaire

◀ *Exo 1* : Si p p projecteur orthogonal, alors par Pythagore $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geq \|p(x)\|^2$.

Réciproquement, soit p projection sur F parallèlement à G, et telle que $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Il s'agit de prouver que F et G sont orthogonaux. Soient $y \in F$ et $z \in G$.

On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $\|ty + z\|^2 = \|ty\|^2$, car $p(ty + z) = ty$, donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $2\langle y, z\rangle t + \|z\|^2 \geq 0$, donc $\langle y, z\rangle = 0$.

◀ *Exo 2* : B est symétrique réelle, donc diagonalisable.

Soit λ une valeur propre de B, et X un vecteur propre de valeur propre λ.

On a $(X \mid BX) = \lambda \|X\|^2$. Or, $(X \mid BX) = (X \mid AX) + \left(X \mid A^T X\right) = 2\,(X \mid AX)$.

Par Cauchy-Schwarz, $|(X \mid AX)| \leq \|X\|\,\|AX\| = \|X\|^2$. Comme $X \neq 0$, $\lambda \in [-2, 2]$.

◀ *Exo 2 bis* : a) cf TD d'entraînement 05 exo A.

b) Idée : Tout sev G de H de dimension k est en particulier un sev de E. Donc $\lambda_k \leq \mu_k$.

D'autre part, tout sev G de H de dimension k s'écrit $F \cap H$, où F sev de E de dimension $(k+1)$.

On en déduit $\mu_k \leq \lambda_{k+1}$.

◀ *Exo 3* : a) On a $A = ZZ^T$, où $Z = (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$. Donc $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ matrice de Gram.

b) Exemple : $B = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 \\ t_1 & t_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t_2 - t_1 \end{pmatrix}$ somme de matrices de $S_n^+(\mathbb{R})$.

Une somme de matrices symétriques positives est symétrique positive, avec $(X \mid MX) + (X \mid NX)$.

De façon générale, posons $B(t_1, ..., t_n) = (\min(t_i, t_j))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$.

On a alors $B(t_1, ..., t_n) = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ t_1 & t_2 & & t_n \end{pmatrix} = B(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_1) + B(0, t_2 - t_1, t_3 - t_1 ..., t_3 - t_1)$.

On peut conclure par récurrence, car si $M \in S_n^+(\mathbb{R})$, $\left(\begin{array}{c|c} O & O \\ \hline O & M \end{array}\right) \in S_n^+(\mathbb{R})$.

◀ *Exo 4* : Idée : $\dfrac{1}{i + j + 1} = \langle f_i, f_j\rangle$, où $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\ dtetf_j(t) = t^j$.
Donc $X^T AX = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n x_i x_j \langle f_i, f_j\rangle = \|\sum_{i=0}^n x_j f_j\|^2 \geq 0$.

◀ *Exo 5* : a) Dans une BON $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de diagolisation de u, $\langle x, u(x)\rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^2$.

Or, $\operatorname{tr} u = \sum_{j=1}^n \lambda_j = 0$, donc on a $\langle x, u(x)\rangle = 0$ en prenant $x = \sum_{j=1}^n e_j$.

b) Supposons $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ On considère une BON $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$, avec $e_1 = x$ défini au a).

On a alors A orthosemblable à $A' = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & C \end{array}\right)$ symétrique, donc C symétrique de trace nulle.

On conclut par récurrence sur n : par hyp de récurrence, $C = VDV^{-1}$ avec D de diagonale nulle.

On prend alors $U = \left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & V \end{array}\right)$ et on obtient $U^{-1}A'U = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & V^{-1}CV \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & D \end{array}\right)$.

◀ *Exo 6* : a) Avec le th spectral : $A = U^T DU$ avec D diagonale à coefficients réels strictement positifs.

Donc il suffit de prendre $M = U^T D^{1/2} U$ symétrique définie positive.

b) $A^{-1}B = M^{-2}B = M^{-1}(M^{-1}BM^{-1})M$, donc $A^{-1}B$ est semblable à PBP, où $P = M^{-1}$.

Comme B symétrique réelle, PBP symétrique réelle, donc diagonalisable.

◀ *Exo 6 bis* : a) Avec $A = U^T DU$ avec D diagonale, la matrice $P = D^{-1/2}U$ convient.

b) Avec les notations de a), on a $P^T AP = I_n$ et $S = P^T BP$ symétrique.

Donc il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $U^T SU$ diagonale. Avec $Q = PU$, on a $Q^T AQ = I_n$ et $Q^T BQ$ diaognale.

◀ *Exo 7* : a) On a $A = \alpha J + (1-\alpha)I_n$.

Or, J symétrique réelle de rang 1 est semblable à $\mathrm{Diag}(0, ..., 0, p)$, car $\mathrm{tr}\, J = p$.

Donc A diagonalisable de valeurs propres $1-\alpha, ..., 1-\alpha, (p-1)\alpha + 1$.

Donc $\mathrm{rg}\, J = 1$, $n-1$ ou n respectivement pour $\alpha = 1$, $\alpha = -\frac{1}{p-1}$ et $\alpha \notin \{1, -\frac{1}{p-1}\}$.

b) Posons $A = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq p}$ matrice de Gram. Comme $\alpha \neq 1$, alors par a), $\mathrm{rg}\, A = p-1$ ou p.

Mais $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}(x_1, ..., x_p)$: en effet, si $A = M^T M$, on montre que $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, M$ (même noyau en fait).

Donc $p - 1 \leq, n$, c'est-à-dire $p \leq n-1$.

Dans le cas $p = n-1$, on a nécessairement $\alpha = -\frac{1}{p-1} = -\frac{1}{n}$.

◀ *Exo 8* : On a A^2 symétrique. Comme $A^2 = -A^T A$, alors $A^2 \in S_n^-(\mathbb{R})$, donc sur $\mathbb{C}$, $\mathrm{Sp}(A) \subset i\mathbb{R}$.

On a $A^2 = B$ diagonalisable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans une BON. Les sev propres de B sont stables par A.

On se ramène donc à des équations $a^2 = \lambda\, \mathrm{Id}$, où a est antisymétrique.

Si λ non nul, on en déduit a diagonalisable (car $X^2 - \lambda$ scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$).

Si $\lambda = 0$, alors $a^2 = 0$. On va prouver que $a = 0$. Il suffit de justifier que la seule matrice antisymétrique vérifiant $A^2 = O$ est la matrice nulle. Cela résulte de $0 = \mathrm{tr}(A^2) = -\mathrm{tr}(A^T A) = -\|A\|_2^2$.