Algèbre générale

Algèbre générale : arithmétique, nombres complexes, polynômes

- Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$: $\mathrm{pgcd}(a,b) = \mathrm{pgcd}(b,r)$, où $a = bq + r$.

- Décomposition d'un entier $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{m_i}$ en facteurs premiers.

- Nombres complexes et angles : a, b, c alignés ssi $\arg(\frac{b-a}{c-a}) = 0\ [\pi]$, ssi $(b-a)(\overline{c-a}) \in \mathbb{R}$ ssi $\mathrm{Im}((b-a)(\overline{c-a})) = 0$.

- Th de d'Alembert-Gauss et factorisation, cas de $X^n - 1$ et de $1 + X + ... + X^{n-1}$.

- Si a racine de P d'ordre $m \geq 1$, alors a racine de P' d'ordre $(m-1)$.

- Racines des polynômes : ordre de multiplicité, nombre de racines (pour les réels : étude de fonctions).

Relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé à racines simples.

- Théorème de d'Alembert Gauss. Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont de degré 1 ou 2.

- Polynômes de Lagrange : $P(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k L_k(x)$, où $L_k = \prod_{j \neq k} \frac{x-a_j}{a_k-a_j}$. On a $\deg P < n$ et $P(a_k) = y_k$.

Base de Lagrange : $\forall P \in K_{n-1}[X]$, $P(X) = \sum_{k=1}^{n} P(a_k) L_k(X)$.

- Décomposition en éléments simples d'une fraction dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

Cas particulier à connaître : $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{X-a_k}$, où $P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - a_k)^{m_i}$.

Exemple : $n \in \mathbb{N}^*$ admet un nombre impair de diviseurs ssi n carré.

En effet, avec $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{m_i}$, alors $d = \prod_{i=1}^{r} (1 + m_i)$ est impair ssi tous les m_i sont pairs.

Exemple : Tout entier $n \in [\![0, 2^N - 1]\!]$ s'écrit de façon unique $n = \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_k 2^k$, où $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$.

Exemple : a) Si a racine de P d'ordre $m \geq 1$, alors a racine de P' d'ordre $(m-1)$.

b) Si P est scindé à racines simples (resp. scindé) dans $\mathbb{R}[X]$, alors P' l'est aussi (utiliser Rolle).

Variante : Si P est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}[X]$, $P' - \lambda P$ est scindé.

Exemple : $(1 + X + X^2)$ divise $P \in \mathbb{R}[X]$ ssi $P(j) = 0$; $(X-1)^2$ divise P ssi $P(1) = P'(1) = 0$.

Exemple : P polynôme réel est positif sur $\mathbb{R}$ ssi il s'écrit $\lambda \prod_{i=1}^{r} (x - a_i)^2 \prod_{j=1}^{s} (x^2 + b_j x + c_j)$.

Exemple : Calculs de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\ dt}{(t-1)^2+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(u+1)\ du}{u^2+1}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3}$ (en utilisant $\frac{1}{1+t^3} = \frac{a}{1+t} + \frac{bt+c}{1-t+t^2}$).

Exemple : Si P réel scindé sur $\mathbb{R}$, alors $P'(x)^2 \leq P''(x) P(x)$. En effet, $\left(\frac{P'}{P}\right)' = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x-a_k)^2} < 0$.

◀ *Exo 1* : Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. Montrer que abc équilatéral ssi $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$.

◀ *Exo 2* : Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P.

◀ *Exo 3* : Déterminer les polynômes réels non nuls P vérifiant $P(X)P(X-1) = P(X^2)$.

◀ *Exo 4* : Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = (X+1)^n - (X-1)^n$.

Algèbre linéaire

- Une application linéaire est entièrement définie par l'image d'une base.

- Théorème fondamental : $u \in \mathcal{L}(E, F)$ induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}\, u$, avec $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus S$.

Dans des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ adaptées à $S \oplus \operatorname{Ker} u = E$ et $\operatorname{Im} u \oplus T = F$, $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\, u = \left(\begin{array}{c|c} M & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$, avec $M \in GL_r(K)$..

Remarque : En fait, toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ s'écrit $A = QJ_rP$, avec $r = \operatorname{rg} A$.

- Théorème du rang ; $\dim u(F) = \dim F - \dim(\operatorname{Ker} u \cap F)$. D'où $\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg}(u) - \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im}(v))$.

- Familles libres, familles de polynômes de degrés échelonnés, matrices triangulaires sup inversibles.

- Les formes linéaires sur K^n sont les $X \longmapsto Z^T X$. Les formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(K)$ sont les $M \longmapsto \operatorname{tr}(AM)$.

- Endomorphismes dans $\mathbb{R}_n[X]$. Conservation du degré (ou bien abaissement du degré).

Exemple : Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $|\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leq \operatorname{rg}(u+v) \leq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$.

En effet, $\operatorname{rg}(u+v) \leq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$ se déduit de $\operatorname{Im}(u+v) \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$. D'où $\operatorname{rg} u \leq \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg}(-v)$.

Exemple : Pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $P(X+1) - P(X) = Q(X)$ et $P(0) = 0$.

Exemple : Les formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(K)$ sont les $M \longmapsto \operatorname{tr}(A^T M) = \sum_{i,j} a_{ij} m_{ij}$, où $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

Remarque : $(A, B) \longmapsto \operatorname{tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ce qui redonne le résultat lorsque $K = \mathbb{R}$.

◀ *Exo 5* : *Lemme de factorisation* : Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$ et $w \in \mathcal{L}(E, G)$ en dim finie (ou infinie).

Montrer que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} w$ ssi $\exists\, v$, $w = v \circ u$, et que $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Im} v$ ssi $\exists\, u$, $w = v \circ u$.

Indication : Utiliser une base.

Variante : $\operatorname{Im} w \subset \sum_{i=1}^r \operatorname{Im} v_i$ ssi il existe une famille $(u_i)_{1 \leq i \leq r}$ telle que $w = \sum_{i=1}^r v_i \circ u_i$.

◀ *Exo 6* : Soit A et $B \in \mathcal{M}_n(K)$.

a) On considère $v : \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K) \quad M \longmapsto AM$. Montrer que $\det v = (\det A)^n$.

b) On considère $u : \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K) \quad M \longmapsto AMB$. Montrer que $\det u = (\det A)^n (\det B)^n$.

Indication : a) On a $AE_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ki} E_{kj}$. On considère la matrice de u dans la base $(E_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ pris dans un ordre judicieux de sorte que la matrice de u soit une matrice diagonale par blocs où tous les blocs sont égaux à la matrice A.

◀ *Exo 7* : Soient a et b des réels distincts, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^4.

Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tels que $P(a) = f(a)$, $P(b) = f(b)$, $P'(a) = f'(a)$ et $P'(b) = f'(b)$.

◀ *Exo 8* : Soient des projecteurs $p_1, ..., p_r$ tels que $\sum_{i=1}^r p_i = \operatorname{Id}$. Justifier que $\sum_{i=1}^r \operatorname{rg} p_i = n$.

Montrer que $\oplus_{i=1}^r \operatorname{Im} p_i = E$ et $\forall i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$ et $\operatorname{Ker} p_i = \oplus_{j \neq i} \operatorname{Im} p_j$.

Réduction des endomorphismes

- Réduction dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$: les classes de similitude sont celles de λI_2, $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
- Toute matrice réelle A peut être vue dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: il existe $Z = X + iY$ non nul et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $AZ = \lambda Z$.

Remarque : On peut en déduire que tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-ev admet une droite ou un plan stable.

- Trigonalisation et polynômes caractéristiques scindés (d'où en particulier trigonalisation sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

- Polynômes d'une matrice diagonalisable, utilisation de l'interpolation de Lagrange.

- Caractérisation des matrices diagonalisables : il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples.

En particulier, si u est diagonalisable, alors $P(x)=\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}(x-\lambda)$ annule u.

Donc la restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sev stable est aussi diagonalisable.

Complément : $u\in\mathcal{L}(E)$ admet un polynôme annulateur non nul π de degré minimal ; alors, les polynômes annulateurs sont les multiples de π (si $P=\pi Q+R$, alors $P(u)=R(u)=0$ ssi $R=0$).

On peut noter que sur $\mathbb{C}$, $\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}(X-\lambda)$ divise π, et π divise χ_u.

- Endomorphismes commutants : si u et v commutent, alors les sev propres E_λ de u sont stables par v (la réciproque est vraie si les endomorphismes sont diagonalisables).

Complément : Des endomorphismes commutants et trigonalisables (resp. diagonalisables) sont cotrigonalisables (resp. codiagonalisables).

Preuve pour un vecteur propre commun : E_λ stable par v, et on considère un vecteur propre de $v_{|E_\lambda}$.

Remarque : Deux matrices réelles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Projecteurs : $p:E=F\oplus G\to E \quad x=y+z\longmapsto y$ avec $F=\mathrm{Im}\,p=\mathrm{Ker}(p-\mathrm{Id})$ et $g=\mathrm{Ker}\,p$.

Caractérisations : $p\circ p=p$, p diagonalisable et $\mathrm{Sp}(p)\subset\{0,1\}$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,p=\left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O\end{array}\right)$; propriété $\mathrm{tr}\,p=\mathrm{rg}\,p$.

- Sev stables, la restriction d'un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable. Les droites stables sont les droites dirigées par un vecteur propre (il y en a une infinité lorsque $\dim E_\lambda\geq 2$).

- Équation d'un hyperplan de $\mathbb{R}^n$: $\langle Z,X\rangle=0$, avec Z vecteur non nul et $\langle\ ,\ \rangle$ produit scalaire canonique.

Recherche des hyperplans stables : $\forall X,\ \langle Z,X\rangle=0\Rightarrow\langle Z,AX\rangle=0$ ssi Z est vecteur propre de A^T.

- Matrices nilpotentes, caractérisations : $A^n=O_n$, $\mathrm{Sp}(A)=\{0\}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Matrices nilpotentes d'ordre n : réduction (semblables à $J=(\delta_{i+1=j})_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq n}$).

- Matrices compagnons : polynôme caractéristique, les sev propres sont de dim 1.

- Matrices de permutation.

Exemple : Si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^3+A=0$, alors $\mathrm{Sp}(A)\subset\{0,i,-i\}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on a $\mathrm{tr}\,A=0$.

Exemple : Les matrices $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ triangulaires supérieures telles que $\exists\,p\in\mathbb{N}^*$, $A^p=I_2$ sont les matrices λI_2 ou $\begin{pmatrix}\lambda & \alpha\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$, avec λ et μ de la forme $\exp(2i\pi\mathbb{Q})$ et $\lambda\neq\mu$.

Exemple : $A^2=O_n$ ssi A est semblable à $\left(\begin{array}{c|c} O & I_r \\ \hline O & O\end{array}\right)$, avec $r=\mathrm{rg}\,A<\frac{1}{2}n$.

Exemple : $A^2=A$ ssi A semblable à $\left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O\end{array}\right)$. Ainsi, A projecteur ssi A diagonalisable et $\mathrm{Sp}\,A\subset\{0,1\}$.

Exemple : Si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, il existe $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $P(A)^3=A$: on choisit P tel que $P(\lambda)=\lambda^{1/3}$.

Exemple : Si $A\in GL_n(K)$ et $B\in\mathcal{M}_n(K)$, alors AB et BA sont semblables.

Remarque : On en déduit par densité de $GL_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ que $\chi_{AB}=\chi_{BA}$ pour A et $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Remarque : On a toujours $\chi_{AB\,\mathrm{Sp}}=\chi_{BA}$, mais il existe $AB=O$ et $BA\neq O$.

◀ *Exo 1* : $u:\mathcal{M}_n(K)\to\mathcal{M}_n(K)\quad M\longmapsto AM$ est diagonalisable ssi A est diagonalisable.

Préciser dans ce cas une base de vecteurs propres de u.

◀ *Exo 1 bis)* : Donner une CNS pour que $u : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad M \longmapsto AM + MA$ soit inversible.

◀ *Exo 2* : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det A$ est strictement positif.

◀ *Exo 3* : Soient p et q projecteurs. Montrer que $p+q$ projecteur ssi $p \circ q = q \circ p = 0$.

Dans ce cas, préciser les caractéristiques de la projection.

◀ *Exo 4* : a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ de rang 1. Montrer que A est diagonalisable ssi $\operatorname{tr} A \neq 0$.

b) Dans le cas où $\operatorname{tr} A = 0$, montrer que A est semblable à la matrice canonique $E_{n-1,n}$.

◀ *Exo 5* : *Matrices compagnons.* On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K)$.

a) Montrer que $\chi_A(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$.

b) Montrer : A est diagonalisable ssi χ_A scindé à racines simples. *Indication* : Noter que $\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) \geq n-1$.

◀ *Exo 6* : a) Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que A diagonalisable ssi A^2 diagonalisable.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A diagonalisable ssi (A^2 diagonalisable et $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^2$).

c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\operatorname{Sp}(A) \subset i\mathbb{R}$.

d) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que $\operatorname{rg} A$ est pair.

Indication : On peut soit utiliser c) soit une preuve directe en se ramenant au cas A inversible.

◀ *Exo 7* : Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O & B \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{C})$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

a) Montrer que si M est diagonalisable, alors A et B sont diagonalisables.

b) On suppose A et B diagonalisables et $\operatorname{Sp}(A) \cap \operatorname{Sp}(B) = \emptyset$. Montrer que M est diagonalisable.

◀ *Exo 7 bis* : Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline O & A \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(M) = \left(\begin{array}{c|c} P(A) & AP'(A) \\ \hline O & P(A) \end{array}\right)$.

b) Montrer que si M est diagonalisable, alors A est nulle.

◀ *Exo 8* : Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible ssi A et B n'ont pas de valeur propre commune.

b) Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AM = MB$ ssi $\operatorname{Sp}(A) \cap \operatorname{Sp}(B) \neq \emptyset$.

Remarque : Ainsi, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AM = -MA$ ssi $\operatorname{Sp}(A) \cap \operatorname{Sp}(-A) \neq \emptyset$.

c) Montrer que $u : M \longmapsto AM - MB$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ssi $\operatorname{Sp}(A) \cap \operatorname{Sp}(B) = \emptyset$.

◀ *Exo 9* : On considère $u : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad M \longmapsto AM - MB$, où A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On a $u = v - w$, où $v : M \longmapsto AM$ et $w : M \longmapsto MB$ commutent.

a) Montrer que A est diagonalisable ssi v est diagonalisable.

b) Montrer que $\chi_u(x) = \chi_A(x)^n$.

c) Montrer que si A et B sont nilpotentes, alors u est nilpotent.

d) Soient $(X_1, ..., X_n)$ et $(Y_1, ..., Y_n)$ bases de $\mathbb{C}^n$. Montrer que $(X_i Y_j^T)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

e) Montrer que si A et B sont diagonalisables, w diagonalisable et $\mathrm{Sp}(w) = \{\lambda - \mu,\ (\lambda, \mu) \in \mathrm{Sp}(A) \times \mathrm{Sp}(B)\}$.

Indication : Utiliser c), avec (X_i) et (Y_i) base de vecteurs propres de A et B^T.

Autre solution : Si A et B diagonales, alors E_{ij} est un vecteur propre de u (de valeur propre $\lambda_i - \mu_j$).

Pour s'y ramener, on peut noter que $P^{-1}(AM - MB)Q = (P^{-1}AP)(P^{-1}MQ) - (P^{-1}MQ)(Q^{-1}BQ)$.

◀ *Exo 10* : *Produit tensoriel.* Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} aA & cA \\ \hline bA & dA \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(K)$, avec $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $(a, b, c, d) \in K^4$.

On suppose que A et $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ sont diagonalisables. Montrer que M est diagonalisable.

Algèbre bilinéaire

- Le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$.

- Le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ est $\langle X, Y\rangle = X^T Y$.

Si Z unitaire, la matrice ZZ^T est la matrice de la projection orthogonale sur $\mathbb{R}Z$, car $ZZ^T X = \langle Z, X\rangle\, Z$.

- Procédé de Gram-Schmidt : $b_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle a_k, e_j\rangle\, e_j$ et $e_j = b_j / \|b_j\|$.

Interprétation matricielle : Décomposition d'Iwasawa : $A = UT$, avec U orthogonale et T triangulaire supérieure.

- Isométries : $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. Image d'une BON.

- Endomorphismes auto-ajoint : $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$; dans une BON, $a_{ij} = \langle e_i, u(e_j)\rangle = a_{ji}$.

Théorème spectral : auto-ajoint = diagonalisable dans une BON.

Si u auto-ajoint, alors : $u \in S^+(E) \Leftrightarrow \forall x \in E,\ \langle x, u(x)\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$.

Donc $S^+(E)$ est un cône convexe : si u et $v \in S^+(E)$, α et $\beta \in \mathbb{R}^+$, alors $\alpha u + \beta v \in S^+(E)$.

- Matrices de Gram : $M = A^T A = (\langle A_i, A_j\rangle)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$. On a $\operatorname{rg}(A^T A) = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A^T A)$.

- Matrices symétriques positives.

Lien avec les matrices de Gram : $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ ssi il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P^T P$.

Lien avec les formes quadratiques : Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ ssi $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $\forall X,\ X^T A X = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \geq 0$.

Exemple : Les projections orthogonales et les symétries orthogonales sont symétriques.

Remarque : Si $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, la sous-matrice $(a_{ij})_{1\leq i\leq n-1, 1\leq j\leq n-1} \in S_{n-1}^+(\mathbb{R})$: on prend $x_n = 0$ (se généralise).

- Matrices symétriques définies positives : $(X, Y) \longmapsto X^T A Y$ produit scalaire.

- Hausdorffien : Pour u symétrique, $\sup(\operatorname{Sp} u) = \sup_{x\neq 0} \dfrac{\langle u(x), x\rangle}{\|x\|}$.

Important : $\dfrac{\langle u(x), x\rangle^2}{\|x\|^2} = \dfrac{\sum_{\kappa=1}^n \lambda_k x_k^2}{\sum_{\kappa=1}^n x_k^2}$, donc $\dfrac{\langle u(x), x\rangle}{\|x\|}$ décrit $[\lambda_1, \lambda_n]$ lorsque x décrit $E \setminus \{\overrightarrow{0}\}$.

- Endomorphismes antisymétriques : $\forall x \in E,\ \ \langle x, u(x)\rangle = 0$ ssi $\forall (x, y) \in E^2,\ \langle x, u(y)\rangle = -\langle u(x), y\rangle$ ssi la matrice de u dans une (toute) base orthonormée est antisymétrique. On a $\operatorname{Sp} u \subset \{0\}$, et si n impair, $\operatorname{Sp} u = \{0\}$.

- Pour les isométries, et les symétriques et antisymétriques : L'orthogonal d'un sev stable est stable.

- Distance d'un point à un sev pour une norme euclidienne. Applications à certains problèmes de minimisation.

Exemple : $\mathbb{R}_n[X]$ euclidien admet une base orthogonale $(P_0, P_1, ..., P_n)$ avec P_k unitaire et $\deg P_k = k$.

Exemple : $\int_0^{+\infty} (f(t) - a - bt)^2\, e^{-t}\, dt$ minimum pour f projeté sur $F = \operatorname{Vect}(1, t)$ pour $\langle f, g\rangle = \int_0^{+\infty} f(t) g(t)\, e^{-t}\, dt$.

Exemple : Soient p et q des projecteurs orthogonaux. Montrer que $\operatorname{Sp}(p+q) \subset [0, 2]$.

On a p et $q \in S(E)$ et $\langle x, (p+q)(x)\rangle = \langle x, p(x)\rangle + \langle x, q(x)\rangle$, et on conclut avec l'Haüsdorffien.

Exemple : Pour toute matrice $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, il existe $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

De plus, B est unique (on se ramène au cas $A = \lambda \operatorname{Id}$ en considérant les sev propres de A).

Exemple : Pour toutes fonctions $f_1, ..., f_n \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$, on a $\left(\int_0^1 f_i f_j\right)_{1\leq i\leq n, 1 j\leq n} \in S_n^+(\mathbb{R})$.

◀ *Exo 10* : Soit p projecteur. Montrer que p projecteur orthogonal ssi $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$.

◀ *Exo 11* : On pose $B = A + A^T$, où $A \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que B est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(B) \subset [-2,2]$.

◀ *Exo 12* : a) Soit $u \in S(E)$ de valeurs propres $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$.

Montrer que $\lambda_k = \inf_{\dim F = k} \left(\sup_{x \in F,\ x \neq 0} \dfrac{\langle u(x), x\rangle}{\|x\|} \right)$.

Indication : Considérer $F \cap \mathrm{Vect}(e_k, e_{k+1}, ..., e_n) \neq \emptyset$. En déduire $\sup_{x\in F,\ x\neq 0} \dfrac{\langle u(x), x\rangle}{\|x\|} \geq \lambda_k$.

b) Soit v la restriction de u à un hyperplan H de E. On note $\mu_1 \leq ... \leq \mu_n$ ses valeurs propres.

Montrer que $\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq ... \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n$.

◀ *Exo 13* : a) Soient des réels $t_1, ..., t_n$. Montrer que $A = (t_i t_j)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in S_n^+(\mathbb{R})$.

b) On suppose $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$. Montrer que $B = (\min(t_i, t_j))_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Indication : Décomposer $X^T B X$ en une somme, en utilisant les $t_i - t_1$.

◀ *Exo 14* : On pose $A = \left(\dfrac{1}{i+j+1}\right)_{0\leq i\leq n, 0\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Exprimer $X^T A Y$ en fonction d'une intégrale faisant intervenir $\sum_{i=0}^n x_i t^i$ et $\sum_{i=0}^n y_i t^i$. En déduire $A \in S_{n+1}^+(\mathbb{R})$.

◀ *Exo 15* : a) Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ symétrique de trace nulle. Montrer qu'il existe $x \in E$ de norme 1 tel que $\langle x, u(x)\rangle = 0$.

b) En déduire que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle est orthosemblable à une matrice de diagonale nulle.

Indication : Utiliser a) et raisonner par récurrence sur n.

◀ *Exo 16* : a) Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ sym définie positive. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.

b) Soit $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Montrer que $A^{-1}B$ est diagonalisable.

Indication : Noter que $A^{-1}B$ est semblable à PBP, où $P = M^{-1}$.

Autre méthode (conseillée) : $A^{-1}B$ est symétrique pour le ps $\langle X, Y\rangle = X^T A Y$. D'où une autre preuve.

c) On pose $\mu = \sup_{X\neq 0} \dfrac{X^T B X}{X^T A X}$. Montrer que $\mu = \max\left(\mathrm{Sp}(A^{-1}B)\right)$.

◀ *Exo 16 bis* : a) Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ symétrique définie positive.

Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^T A P = I_n$.

b) (★) Soit $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^T A P = I_n$ et $P^T B P$ diagonale.

◀ *Exo 17* : a) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, avec $a_{ii} = 1$ et $a_{ij} = \alpha$ pour $i \neq j$. Calculer $\mathrm{rg}\, A$.

Indication : Utiliser la matrice J ne contenant que des 1 et semblable à $\mathrm{Diag}(n, 0, ..., 0)$.

b) (★) Soient une famille $(x_1, ..., x_p)$ de E euclidien de dimension n et un réel $\alpha < 1$.

On suppose que $\|x_i\| = 1$ et $\langle x_i, x_j\rangle = \alpha$ pour $i \neq j$. Montrer que $p \leq n+1$, et que si $p = n+1$, alors $\alpha = \frac{-1}{n}$.

Remarque : On peut aussi montrer qu'il existe une telle famille de cardinal $p = n+1$.

Indication : Utiliser la matrice de Gram $A = M^T M = (\langle x_i, x_j\rangle)_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq p}$.

◀ *Exo 18* : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et que $\mathrm{Sp}(A) \subset i\mathbb{R}$.