

## Oraux blancs. Série 6. Corrigé/Indications

1)  $P(X = 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = 1 \mid N = n)P(N = n).$

$N$  suit une loi géométrique (loi de premier succès) de paramètre  $\frac{1}{2}$ . On a  $P(N = n) = \frac{1}{2^n}$ .

D'autre part,  $P(X = 1 \mid N = n) = \frac{1}{n}$ . Donc  $P(X = 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln 2$ .

De même, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a  $P(X = k) = \sum_{n \geq k} \frac{1}{n2^n}$ , car  $P(X = k \mid N = n) = 0$  si  $k < n$ .

On en déduit  $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{k}{n2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n2^n}$  (Fubini)  $= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}}$ .

Or,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = 2$  (cf espérance d'une loi  $G(\frac{1}{2})$ ), donc on obtient finalement  $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ .

*Remarque culturelle :*  $\frac{n+1}{2}$  est en fait l'espérance de  $X$  sachant  $N = n$ , qu'on note parfois  $E(X \mid N = n)$ .

On a donc  $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} E(X \mid N = n)P(N = n)$  formule des espérances conditionnelles (hors-prog).

2)  $X = \sum_{k=1}^n 1_{A_k}$ , où  $A_k$  est l'événement “ $k$  admet au moins 3 antécédents par  $f$ ”.

Le nombre  $Y$  d'antécédents d'un élément  $k$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, \frac{1}{n})$ .

En effet,  $Y$  s'écrit sous la forme de  $n$  variables de Bernoulli indépendantes :  $Y = \sum_{j=1}^n 1_{f(j)=k}$ .

$$\text{Donc } P(A_k) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - \binom{n}{1} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} - \binom{n}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2}.$$

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_k) = 1 - \left(1 + 1 + \frac{1}{2}\right) e^{-1} = \left(1 - \frac{5}{2e}\right).$$

On en déduit que  $E(X) \sim \lambda n$ , où  $\lambda = 1 - \frac{5}{2e}$ .

3) Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ .

Il existe alors  $X$  non nul tel que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = \lambda x_i$ , d'où  $|\lambda - a_{ii}||x_i| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}||x_j|$ .

On choisit  $i$  tel que  $|x_i| = \max(|x_j|)$ . On a  $|x_i| > 0$  car  $X$  non nul.

Comme  $|a_{ii}| > 2 \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ , alors  $|\lambda - a_{ii}| > \frac{1}{2} |a_{ii}|$ . Donc a fortiori  $|a_{ii}| > \frac{1}{2} |a_{ii}| \geq \mu$ .

Comme la propriété est vraie pour toute racine  $\lambda$  de  $\chi_A$ , on a  $|\det A| \geq \mu^n$ .

4) Le principe est d'essayer d'écrire  $f'(t) - f(t)$  sous une forme plus sympathique : c'est le principe même de la variation de constante dans la résolution des équation différentielle  $y' - y = g(t)$ .

On peut aussi interpréter la méthode en notant que  $f'(t) - f(t)$  apparaît lorsqu'on dérive  $f(t)e^{-t}$ .

Plus précisément,  $\boxed{f'(t) - f(t) = g'(t)e^t, \text{ où } g(t) = f(t)e^{-t}}$ . On a  $\boxed{g(0) = 0 \text{ et } g(1) = e^{-1}}$ .

Lorsque  $f$  décrit l'ensemble des fonctions de classe  $C^1$  vérifiant  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ , l'application  $g$  décrit l'ensemble des fonctions de classe  $C^1$  vérifiant  $g(0) = 0$  et  $g(1) = e^{-1}$ .

$$\text{On a donc } \boxed{\int_0^1 |f'(t) - f(t)| dt = \int_0^1 |g'(t)| e^t dt}.$$

$$\text{On a } \int_0^1 |g'(t)| e^t dt \geq \int_0^1 |g'(t)| dt \geq \left| \int_0^1 g'(t) dt \right| = g(1) = e^{-1}, \text{ car } f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1.$$

Donc  $e^{-1}$  est un minorant. On va montrer qu'on peut l'approcher arbitrairement près.

Pour approcher cette valeur, on prend des fonctions  $g$  continues croissantes de classe  $C^1$  telles que  $g'$  est nulle en dehors d'un intervalle  $[0, \varepsilon]$ . On prend par exemple  $g'$  positive, affine par morceaux, avec  $g'(t)$  affine sur  $[0, \varepsilon]$  et nulle sur  $[\varepsilon, 1]$ , et de sorte que  $\int_0^\varepsilon g'(t) dt = e^{-1}$ .

Autrement dit,  $g'(t) = \frac{2e^{-1}}{\varepsilon^2} (\varepsilon - t)$  si  $t \in [0, \varepsilon]$  et  $g'(t) = 0$  si  $t \geq \varepsilon$ .

Dans ce cas  $g(t) = \int_0^t g'$  vérifie bien les propriétés requises.

On a alors  $\int_0^1 |g'(t) e^t| dt = \frac{2e^{-1}}{\varepsilon^2} \int_0^\varepsilon (\varepsilon - t) e^t dt$  est compris entre  $e^{-1}$  et  $e^{-1}e^\varepsilon$ .

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers  $0^+$ , on obtient bien  $e^{-1}$  comme valeur limite (ici borne inf non atteinte).

**5) a)** En dimension 1 : On cherche un cercle d'équation  $x^2 + (y - a)^2 = a^2$  avec  $a \neq 0$ , c'est-à-dire  $x^2 + y^2 - 2ay = 0$ .

Pour avoir  $f$  au-dessous du cercle, il faut  $a > 0$  et  $(x, f(x))$  en dehors du cercle pour tout  $x \in [-a, a]$ .

On veut donc  $a > 0$  et  $x^2 + y^2 - 2ay \geq 0$ . Il suffit donc d'avoir  $\forall x \in [-a, a], x^2 - 2af(x) \geq 0$ .

Or, par l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a  $\forall x \in [-1, 1], f(x) \leq \frac{1}{2}Mx^2$ , où  $M = \sup_{[-1, 1]} |f''|$ .

On peut donc prendre  $a = \min(1, \frac{1}{M})$ .

*Remarque :* On peut aussi raisonner en utilisant Taylor-Young :  $f(x) = \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2)$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\forall x \in [-\alpha, \alpha], f(x) \leq Mx^2$ , où  $M = \frac{1}{2}f''(0) + \varepsilon$ .

On peut donc prendre  $a = \alpha$  si  $M \leq 0$  et  $a = \min(\alpha, \frac{1}{M})$  si  $M > 0$ .

**b)** On a de même pour une sphère de centre  $(0, \dots, 0, a)$  :  $\sum_{i=1}^n x_i^2 + y^2 - 2ay = 0$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Et on a  $f(x) \leq \frac{1}{2}M(\sum_{i=1}^n x_i^2)$  sur un voisinage  $[-\alpha, \alpha]$  de 0, en prenant  $\boxed{M > \sup_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda_i}$ .

On peut donc prendre  $a = \min(\alpha, M)$ .

**6)** Faire un schéma ! On considère  $\lambda = \sup A$ , où  $A = \{x \mid f(x) \geq x\}$ .

On a  $0 \in A$  et  $A$  majorée par 1, donc  $\lambda$  existe.

$\lambda$  est adhérent à  $A$  : si  $\lambda \in A$ , alors  $f(\lambda) \geq \lambda$  ;

Sinon,  $\lambda$  est limite d'une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$ , donc  $\lim_{\lambda^-} f \geq \lambda$ , et a fortiori,  $f(\lambda) \geq \lambda$ .

Si  $x > \lambda$ , alors  $f(x) < x$ , donc  $\lim_{\lambda^+} f \leq \lambda$  (si  $\lambda < 1$ ), et a fortiori,  $f(\lambda) \leq \lambda$ . (vrai aussi si  $\lambda = 1$ ).

*Remarque :* Si  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone, cv vers  $L$ , mais on a seulement  $\lim_{L^-} f \leq L \leq \lim_{L^+} f$ .

**7) a)** Pour pouvoir appliquer la cv dominée, il faut se ramener à des fonctions intégrables.

On utilise IPP : on a  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$  et  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{n(e^{t/n} - 1)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{t/n}(1 - \cos(t))}{n^2(e^{t/n} - 1)^2} dt$ .

On a alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{t/n}(1 - \cos(t))}{n^2(e^{t/n} - 1)^2} = \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ .

Domination :  $\frac{e^{t/n}(1 - \cos(t))}{n^2(e^{t/n} - 1)^2} \leq \frac{1 - \cos(t)}{n^2(e^{t/n} - 1)(1 - e^{-t/n})} = \frac{1 - \cos(t)}{2n^2(\text{ch}(t/n) - 1)} \leq \frac{1 - \cos(t)}{t^2} = \varphi(t)$ .

b) On a  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^{t/n} - 1} dt = \int_0^{+\infty} (\sin t) \left( \sum_{k=0}^{+\infty} e^{kt/n} \right) dt$ . On a  $\int_0^{+\infty} (\sin t) e^{kt/n} dt = \frac{1}{1 + (k/n)^2}$ .

On conclut avec ITT mais en majorant  $|\sin(t)|$  par  $t$ , car  $\int_0^{+\infty} t e^{kt/n} du = O(\frac{1}{k^2})$  lorsque  $k \rightarrow +\infty$ .

c) On utilise une comparaison entre séries et intégrales appliquée à  $t \mapsto \frac{1}{1 + (t/n)^2}$ .

On a  $\frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + (t/n)^2} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + (k/n)^2} \leq \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + (t/n)^2} + 1$ .

Comme  $\frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + (t/n)^2} = \left[ \arctan \left( \frac{t}{n} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ .

8) On note  $m$  le nombre de chiffres de l'écriture en base 10 de  $n = \varepsilon_0 + 10\varepsilon_1 + \dots + 10^{m-1}\varepsilon_{m-1}$ .

On a  $10^{m-1} \leq n$  (car  $\varepsilon_{m-1}$  le dernier chiffre du développement n'est pas nul). Ainsi,  $m \leq 1 + \frac{\ln n}{\ln 10}$ .

Le produit  $p_n$  des chiffres de l'écriture en base 10 de  $n \in \mathbb{N}$  vérifie  $p_n \leq 9^m \leq 10^m = 10n$ .

Ainsi,  $p_n \leq 10n$ . Ainsi,  $p_n = O(n)$ . On en déduit que  $R \geq 1$ .

Par ailleurs, il existe une infinité d'entiers  $n$  pour lesquels  $p_n \in \mathbb{N}^*$ , par exemple si  $p_n = 10^p - 1$ .

Donc  $\sum p_n$  diverge et  $R \leq 1$ .

On en conclut  $R = 1$ .

9) On a en particulier  $\text{tr}(S + D) = \text{tr}(D)$ , donc  $\text{tr}(S) = 0$ .

Or,  $\text{tr}(S) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ , avec  $\lambda_i$  valeurs propres de  $S$ . Comme  $\lambda_i \geq 0$ , alors  $\lambda_i = 0$  pour tout  $i$ .

Comme  $S$  est diagonalisable, alors  $S = O_n$ .

Contre-exemple :  $S = \text{Diag}(1, -1)$  et  $D = \text{Diag}(0, 1)$ . On a bien  $S + D$  et  $D$  semblables.

10)  $D = B^3 + B$  est diagonalisable dans une base orthonormée.

Il suffit donc de prouver qu'étant donnée une matrice diagonale  $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , l'équation  $A^3 + A = D$  admet une unique solution  $A \in S_n(\mathbb{R})$ . Supposons  $A^3 + A = D$ .

Les matrices  $A$  et  $D$  commutent, donc les sev propres  $E_\lambda$  de  $D$  sont stables par  $A$ .

En considérant les restrictions de  $A$  aux  $E_\lambda$  (qui sont aussi symétriques), on se ramène donc à résoudre une équation de la forme  $A^3 + A = \lambda I_n$ .

Or, le polynôme annulateur  $P(X) = X^3 + X - \lambda$  admet une unique racine réelle  $\mu$  (faire une étude de fonction), donc  $A$  admet  $\mu$  comme unique valeur propre. Comme  $A$  est diagonalisable,  $A = \mu I_n$ .

Ainsi, l'unique solution est la matrice  $A = \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ , où  $\mu_j^3 + \mu_j = \lambda_j$ .

Remarque : Il est beaucoup plus simple de prouver seulement que  $A$  et  $B$  ont les mêmes valeurs propres.

En effet, les vp de  $A^3 + A$  sont les  $P(\mu)$ , où  $\mu \in \text{Sp}(A)$ . Comme  $P$  bijectif, la connaissance des  $P(\mu)$  détermine entièrement les  $\mu$ .

11) On calcule le polynôme caractéristique : on développer selon la première colonne et par récurrence, mais il vaut mieux utiliser la méthode du pivot en prenant  $x$  supposé non nul comme pivot : on retranche à la dernière colonne les précédentes multipliées par  $-\frac{a_j}{x}$ .

On obtient une matrice triangulaire inférieure dont le dernier coefficient diagonal est  $-\frac{1}{x} \sum_{i=1}^n a_i b_i$ .

On obtient  $\chi_M(x) = x^{n-1} \left( x - \frac{1}{x} \sum_{i=1}^n a_i b_i \right) = x^n - s x^{n-2}$ , où  $s = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ .

La relation est vraie aussi en  $x = 0$  (deux polynômes qui coïncident sur  $\mathbb{C}^*$  sont égaux).

On note par ailleurs que  $\text{rg } M \leq 2$ , donc  $\dim \text{Ker } M = \dim E_0 \geq n - 2$ .

*Premier cas* :  $s \neq 0$ . La matrice  $M$  admet deux valeurs propres non nulles (les racines carrées de  $s$ ).

La somme des dimensions des sev propres est donc  $(n - 2) + 1 + 1 = n$ , donc  $M$  est diagonalisable.

*Second cas* :  $s = 0$ . Alors 0 est la seule valeur propre de  $M$ .

Donc  $M$  est diagonalisable ssi  $M = O_n$ , c'est-à-dire les  $a_i$  et  $b_i$  tous nuls.

*Remarque* : On pourrait aussi déterminer les valeurs propres en cherchant une CNS sur  $\lambda$  pour qu'il existe une solution  $X$  non nul tel que  $MX = \lambda X$ . En supposant  $\lambda \neq 0$ , on obtient la CNS :  $\lambda = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n a_i b_i$ .

**12)** On a  $\|AB\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$  en utilisant  $(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$ .

On conclut en utilisant l'équivalence des normes : on a  $\alpha \|A\|_\infty \leq \|A\| \leq \beta \|A\|_\infty$ , avec  $\alpha > 0$ .

Donc  $\|AB\| \leq \beta \|AB\|_\infty \leq \frac{\beta}{\alpha^2} \|A\| \|B\|$ .

**13)** a) On a  $\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leq S_n \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ , d'où on déduit par pincement  $S_n \sim \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ .

b) On a  $u_n = \frac{1}{n^2} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2(n+1)} \sim \frac{1}{n^3}$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Pour  $n$  assez grand,  $\frac{(1-\varepsilon)}{n^3} \leq u_n \leq \frac{(1+\varepsilon)}{n^3}$ .

Donc  $(1-\varepsilon) \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} u_n \leq (1+\varepsilon) \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ . Donc  $\sum_{k=n}^{+\infty} u_n \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \sim \frac{1}{2n^2}$ .

On en conclut que  $S_n = \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

**14)** On considère  $a_n = \int_0^1 \left( \frac{1+t^2}{2} \right)^n dt$ .

a) On a  $\int_0^1 t \left( \frac{1+t^2}{2} \right)^n dt \leq a_n \leq \int_0^1 \left( \frac{1+t}{2} \right)^n dt$  en utilisant le fait que  $t \in [0, 1]$ .

b) Or,  $\int_0^1 t \left( \frac{1+t^2}{2} \right)^n dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{1+u}{2} \right)^n du \sim \frac{1}{2n}$  et  $\int_0^1 \left( \frac{1+t}{2} \right)^n dt \sim \frac{1}{n}$ .

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$  et  $\sum a_n$  diverge.

D'autre part,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante (car  $\frac{1+t^2}{2} \leq 1$ ), donc  $\sum (-1)^n a_n$  converge par le CSSA.

c)  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n \left( \frac{1+t^2}{2} \right)^n dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left( \frac{1+t^2}{2} \right)^n dt$ .

Pour justifier l'intégration terme à terme, on utilise la convergence dominée appliquée aux sommes partielles (et la domination par la fonction intégrable 1).

D'où  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = \int_0^1 \frac{dt}{1 + (1+t^2)/2} = \int_0^1 \frac{2 dt}{3+t^2} = \left[ \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left( \frac{t}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ .

**15)** a) Le nombre  $M$  d'échecs suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ , avec  $p = \frac{2}{100}$ .

Donc  $P(M \geq 1) = 1 - \left(\frac{98}{100}\right)^n$ . On choisit donc  $n$  tel que  $\left(\frac{98}{100}\right)^n \leq \frac{1}{2}$ .

b) Par Bienaymé-Tchebychev et la loi faible grands nombres,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{M}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) = 0$ .

Pour  $n \geq 40$ , on a donc  $P\left(M < 10\right) \leq P\left(M < \frac{n}{4}\right) \leq P\left(\left|\frac{M}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{4}\right) \rightarrow 0$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

*Autre méthode* : Même principe qu'au a), avec ici  $\sum_{k=0}^9 \binom{n}{k} \left(\frac{98}{100}\right)^{n-k} \left(\frac{2}{100}\right)^k \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

**16)** Le polynôme annulateur  $X^2 - 2(\cos \theta)X + 1$  admet comme racines  $e^{i\theta}$  et  $e^{-i\theta}$ .

Donc les racines du polynôme caractéristique  $\chi_A$  ne sont pas réelles.

Comme  $\chi_A$  est réel, ses racines sont deux à deux conjuguées, donc  $n$  est pair.

De plus,  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ , et semblable à  $\text{Diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta}, \dots, e^{i\theta}, e^{-i\theta})$ .

Chaque bloc  $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$  est semblable à  $B = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ , car  $\chi_B = X^2 - 2(\cos \theta)X + 1$ .

Donc  $A$  est semblable (sur  $\mathbb{C}$ ) à une matrice diagonale par blocs de blocs égaux à  $B$ .

*Remarque* : En fait, ces deux matrices sont semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  : le plus simple est de choisir une base  $(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)$ , où les  $Z_j = X_j + iY_j$  forment du base du  $\mathbb{C}$ -espace  $\text{Ker}(A - e^{i\theta}I)$ .