

Oraux blancs. Série 4

- 1) Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{\sqrt{n(n+1)}}$.
- 2) a) On considère $M = \left(\begin{array}{c|c} I_n & A \\ \hline O_n & B \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ diagonalisable. Montrer que B est diagonalisable.
b) Réciproquement, donner une CNS sur (A, B) pour que M soit diagonalisable.
- 3) On suppose $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(nx) = 1$. Montrer que $x \in 2\pi\mathbb{Z}$.
- 4) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier la définition suivante : $D(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} (\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(\pi x m!))^n$.
b) La fonction D est-elle continue ?
- 5) a) Soit R un rectangle plein de $\mathbb{R}^2$ de côtés a et b . Soit $r > 0$. Calculer l'aire de $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, R) \leq r\}$.
b) Soit R' un rectangle plein de $\mathbb{R}^2$ de côtés a' et b' tel que $R \subset R'$. Montrer que $a + b \leq a' + b'$.
- 6) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que pour tous $x \neq y$, $f'(x) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$.
- 6) bis) Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X + 1) - P(X) = P'(X)$.
- 7) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ polynôme unitaire tel que $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid P(x) + P(y) = 0\}$ est infini.
Montrer que P est de degré impair.
- 8) a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(n!)^2}$.
b) On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$. Montrer que $f(x) = o(e^x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- 9) On considère $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_1^e (\ln t)^n dt$. Déterminer $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$, puis un équivalent de $I_n - L$.
- 10) Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une application 1-lipschizienne.
On considère $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in [a, b]$ et $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n))$.
Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et converge vers un point fixe de f .
- 11) On considère pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^n)}$.
Etudier la convergence simple et uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$.
- 12) On considère $a, b > 0$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n \frac{n+a}{n+b}$.
a) On considère ici le cas $a = b - 1$. Calculer u_n .
b) Dans le cas général, montrer que $\sum u_n$ converge ssi $a < b - 1$.
Montrer que dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{b-1}{b-1-a}$.
Indication : Utiliser $(n+b)u_{n+1} = (n+a)u_n$.