Oraux blancs. Série 3. Indications pour la résolution.

0) a) Par le th de dérivation des intégrales paramétrées (à valider), $f'(t) = \int_0^1 u(x,t)\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)\ dx$.

Donc $f'(t) = \int_0^1 u(x,t)\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\ dx = \left[u(x,t)\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]_0^1 - \int_0^1 \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)^2\ dx = -\int_0^1 \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)^2\ dx \leq 0$.

b) w vérifie (E) : $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ et $w(x,0) = 0$ et $w(0,t) = w(1,t) = 0$.

Par a), $f(t) = \int_0^1 w(x,t)^2\ dx$ est décroissante. Or, $f(0) = \int_0^1 w(x,0)^2\ dx = 0$.

Comme $f(t) \geq 0$, alors $f(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$, et donc $w(x,t) = 0$. Donc $u(x,t) = v(x,t)$.

1) Le nombre est $\leq n^2 - n + 1$, car sinon A contient deux colonnes identiques de 1.

La matrice A ne contenant que des 1 sauf les $(n-1)$ premiers cooefficients diagonaux convient.

En effet, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(Z - E_{11}, ..., Z - E_{n-1}, Z) = \operatorname{rg}(E_{11}, ..., E_{n-1}, Z) = \operatorname{rg}(E_{11}, ..., E_n) = n$.

2) a) Supposons $\alpha > 1$. Posons $\alpha > \beta > 1$. On a $a_n \geq \beta \ln n$ pour n assez grand. Donc $e^{-a_n} \leq \frac{1}{n^\beta}$.

b) On ne peut pas conclure : cf par exemple $a_n = \ln n + \beta \ln(\ln n)$: On a $a_n = \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$.

3) Montrer que $p \circ q = 0$ implique $\operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Im} p$.

En passant aux orthogonaux, $\operatorname{Im} q = (\operatorname{Ker} q)^\perp \subset \operatorname{Ker} p = (\operatorname{Im} p)^\perp$.

4) a) $P(S_n = n) = P(X_1 < X_2 < ... < X_n) = \frac{1}{n!}$ et $P(S_n = 1) = P(X_1 = \max_{1\leq j\leq n} X_j) = \frac{1}{n}$.

b) On note T_k la variable indicatrice de l'événement: il y a un pic au k-ième tirage.

$P(T_k = 1) = P(X_k = \max_{1\leq j\leq k} X_j) = \frac{1}{k}$. On a $S_n = \sum_{k=1}^n 1_{T_k}$, donc $E(S_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$.

Remarque : Pour formaliser $P(T_k) = \frac{1}{k}$, regrouper les permutations selon la valeur de $\Delta = \{X_1, ..., X_k\}$.

Remarque : On a aussi $P(T_k) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n P(T_k, X_k = j) = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^n \binom{j-1}{k-1}/\binom{n-1}{k-1}$.
Or, $\sum_{j=k}^n \binom{j-1}{k-1} = \binom{n}{k}$, donc on obtient bien $P(T_k) = \frac{1}{k}$.

5) Supposons que $X + Y$ et $2X$ ont même loi. Alors $G_X(t)^2 = G_X(t^2)$ pour tout $t \in [-1, 1]$.

Posons $a_n = P(X = n)$ et $p = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$Par identification des coefficients d'une série entière, on a $(a_p)^2 = a_p$ en considérant le terme en t^{2p} de $G_X(t)^2 = G_X(t^2)$.

Donc $a_p = 1$ (car $a_p \neq 0$), et X est presque sûrement constante.

Réciproque immédiate.

6) On a $f(t) = O(t)$ en $t = 0$, donc l'intégrale existe.

On a par IPP,
$\int_0^x \left(\dfrac{f(t)}{t}\right)^2\ dt = \dfrac{f(x)^2}{x} + \int_0^x \dfrac{f(t)f'(t)}{t}\ dt$.

Donc $\int_0^x \left(\dfrac{f(t)}{t}\right)^2\ dt \leq \int_0^x \dfrac{f(t)f'(t)}{t}\ dt \leq \sqrt{\int_0^x \left(\dfrac{f(t)}{t}\right)^2\ dt}\sqrt{\int_0^x (f')^2\ dt}$ par Cauchy-Schwarz.

En supposant f non identiquement nulle, on a $\int_0^x \left(\dfrac{f(t)}{t}\right)^2\ dt > 0$ pour x assez grand, et on a alors $\sqrt{\int_0^x \left(\dfrac{f(t)}{t}\right)^2 dt} \leq \sqrt{\int_0^x (f')^2\, dt}$, donc $\int_0^{+\infty} \left(\dfrac{f(t)}{t}\right)^2 dt$ converge et est $\leq \sqrt{\int_0^{+\infty} (f')^2\, dt}$.

7) Avec $t = \dfrac{u}{n}$, on obtient $I_n = n^{1+\alpha} J_n$, avec $J_n = \int_0^n (1 - \dfrac{u}{n})^n u^\alpha\, du$.

Par cv dominée par $\varphi(u) = u^\alpha e^{-u}$ sur $]0, +\infty[$, on a : $\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u}\, du = \Gamma(1+\alpha)$.

Donc $I_n \sim n^{1+\alpha}\Gamma(1+\alpha)$.

8) Montrons que A est convexe : Soient $a = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$ et $b = \lim_{n\to+\infty} f(y_n)$, avec $x_n \to +\infty$ et $y_n \to +\infty$.

On peut supposer $a < b$. Soit $c \in]a, b[$.

Pour n assez grand, on a $f(x_n) < c < f(y_n)$. Par le TVI, il existe $z_n \in [x_n, y_n]$ tel que $f(z_n) = c$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} f(z_n) = c$ et $\lim_{n\to+\infty} z_n = +\infty$ (car $z_n \geq \min(x_n, y_n)$).

Montrer que A est fermé : Soient $b \in \overline{A}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Il existe $a \in A$ tel que $|b - a| \leq \frac{1}{n}$. Il existe $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \geq n$ et $|x_n - a| \leq \frac{1}{n}$.

On obtient donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $|x_n - b| \leq \frac{2}{n}$ et $x_n \geq n$. Donc $x_n \to +\infty$ et $b \in A$.

9) On a $0 = f(0)$ et $b = f(a)$.

En utilisant le changement de variable $u = f^{-1}(x)$, on a $dx = f'(u)\, du$.

Donc $\int_0^b f^{-1}(x)\, dx = \int_0^a u\, f'(u)\, du$, et par une IPP, $\int_0^a u\, f'(u)\, du = [u\, f(u)]_0^a - \int_0^a f(u)\, du$.

Donc $\int_0^a f(x)\, dx + \int_0^b f^{-1}(x)\, dx = af(a) = ab$.

Remarque : La propriété peut se voir simplement sur un schéma représentant les graphes de f et de f^{-1}.

10) a) Non : Par exemple, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est somme de deux matrices diagonalisables, mais n'est pas diagonalisable. On peut aisément généraliser à tout $n \geq 2$.

b) Si $\dim V > \frac{1}{2}n(n+1)$, V contient une matrice antisymétrique non nulle, qui n'est pas diagonalisable (car 0 est la seule valeur propre non nulle).

Exemple : Sev des matrices symétriques.

11) Supposons A non nilpotente.

Alors A contient une valeur propre non nulle μ.

Pour $\lambda \in K$, λA et A sont semblables, alors $\lambda\mu$ est valeur propre de A.

Comme A contient un nombre fini de valeurs propres, alors K est fini.

Réciproquement, supposons A nilpotente, donc semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour tout λ non nul, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables, donc A et λA sont donc semblables.

12) a) Supposons que f continue vérifie (E).

Posons $\Delta = \operatorname{Im} f$. Pour tout $y \in \operatorname{Im} f$, on a $f(y) = y + 1$.

Donc $y + 1 \in \Delta$. Comme Δ est un intervalle, il est de la forme $(a, +\infty[$.

On a donc $\forall x \in]a, +\infty[$, $f(x) = x + 1$ et donc par continuité $f(a) = a + 1$ si a réel.

Si a réel, on doit aussi avoir $]a, a+1[\subset f(]-\infty, a[)$.

b) Il suffit de considérer $f : x \longmapsto \begin{cases} x+1 \text{ si } x \geq 0 \\ 1-e^x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

13) *Analyse* : Supposons que A et $-A$ sont semblables.

Alors $\operatorname{tr} A = \det A = 0$, et le polynôme caractéristique de A est de la forme $x^3 - \lambda x$.

Synthèse : La réciproque est vraie.

- *Premier cas* : λ non nul : Alors A est diagonalisable, et ses valeurs propres sont deux à deux opposées, donc A et $-A$ sont semblables.

- *Second cas* : λ nul : Alors A est nilpotente.

On montre d'abord que A est semblable à O_3, à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ selon la valeur de $\operatorname{rg} A$.

14) $\ln(t)\ln(1-t) \sim -t\ln t = \mathfrak{o}(1)$ en $t=0$ et de même en $t=1$, donc intégrale faussement impropre.

On a $J = -\int_0^1 \ln(t) \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^n}{n}\, dt$.

On a par IPP, $\int_0^1 \ln(t)\dfrac{t^n}{n}\, dt = -\dfrac{1}{n(n+1)^2}$, On a $\sum \int_0^1 \left|\ln(t)\dfrac{t^n}{n}\right|\, dt = \sum \dfrac{1}{n(n+1)^2}$ converge.

Donc par ITT, $J = -\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)^2}$.

15) On justifie (via le th du rang) que pour tout polynôme réel P, il existe un polynôme Q tel que $Q(x) - Q(x-1) = P(x)$.

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^n P(k) = Q(n) - Q(0)$.

16) Par Grassmann, $\dim(F\cap G) \geq \dim F + (\dim G - \dim(F+G))$, donc $\dim(F\cap G) \geq \dim F - \operatorname{codim} G$.

Donc $\dim(F\cap G\cap H) \geq \dim F - \operatorname{codim} G - \operatorname{codim} H$. Ici, $\dim F - \operatorname{codim} G - \operatorname{codim} H > 2n - 2n = 0$.

Donc $\dim(F\cap G\cap H) > 0$, d'où le résultat.

17) On considère une base $(e_1, ..., e_p) \cup (e_{p+1}, ..., e_n)$ adaptée à $F \oplus S = E$.

Alors F est l'intersection des hyperplans $x_k = 0$, avec $k \in \{p+1, ..., n\}$.

18) Posons $f(x,y) = \det(xA + yB)$.

Par hypothèse, $f(1,0) = f(0,1) = f(1,1) = f(1,-1) = 0$.

On a $f(1,t) = P(t) = \det(A + tB) = (\det B)t^3 + ...$ polynôme, qui de degré ≤ 2 car $\det B = 0$.

Or, $P(1) = P(-1) = P(0)$, donc P admet au moins trois racines distinctes. Donc P est identiquement nul.

On a pour $x \neq 0$, $f(x,y) = x^3 \det(A + tB)$, où $t = \dfrac{y}{x}$, donc pour $x \neq 0$, $f(x,y) = 0$.

D'autre part, $f(0,y) = \det(yB) = y^3 \det B = 0$, donc $f(0,y) = 0$.

(*Remarque* : Le cas $x = 0$ peut se déduire aussi du cas $x \neq 0$ par continuité).

19) A est la matrice d'une projection (sur $F = E_1$ parallèlement à $G = E_0$).

De plus, A est symétrique, donc A est une projection orthogonale.

Une projection orthogonale s'écrit $u(x) = \sum_{j=1}^{r} \langle e_j, x\rangle\ x$ avec $(e_1, ..., e_r)$ orthonormée.

Matriciellement, on a donc $A = \sum_{j=1}^{r} Z_j Z_j^T$, avec Z_j matrice de e_j.

Variante : On a A symétrique et $U^T AU = U^{-1}AU = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) = \sum_{j=1}^{r} E_{jj}$, avec $U \in O_n(\mathbb{R})$.

On a $E_{jj} = E_j E_j^T$, donc $Z_j = UE_j$ convient.

20) *Remarque* : A est symétrique symétrique et son spectre $\subset \{0, 1\}$. De même pour B.

On considère X vecteur propre de $A + B$ de norme 1. On a $\lambda = \langle (A + B)X, X\rangle = \langle AX, X\rangle + \langle BX, X\rangle \in [0, 2]$.

21) $A^T A$ et AA^T sont symétriques donc diagonalisables. On peut conclure si on suppose connu le fait que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

En fait, immédiat si A inversible (car $A^T A = A^{-1}(AA^T)A$). Sinon, on considère λ tel que $B = A + \lambda\,\mathrm{Id} \in GL_n(\mathbb{R})$.

Et $PB^T B = BB^T P$ implique $PA^T A = AA^T P$, (par calcul : $B^T B = A^T A + \lambda A + \lambda A^T + \lambda^2\,\mathrm{Id}$).

22) a) La v.a. X est constante. En effet, tout événement $A = (X = x)$ est indépendant à lui-même.

Donc $P(A) = P(A)^2$, donc $P(A) \in \{0, 1\}$.

b) Résulte de Cauchy-Schwarz appliqué à X et $1_{X>0}$: $E(X)^2 = E(X.1_{X>0})^2 \leq E(X^2)E(1_{X>0}) = E(X^2)P(X > 0)$.

23) Tout intervalle réel $[0, m]$ contient au plus $\lfloor m + 1\rfloor$ éléments de la suite.

Sinon, deux termes au moins auraient un écart < 1.

On peut donc modifier l'ordre des termes de sorte à les classer par ordre croissant de (*remarque* : ce n'est pas le cas pour une suite arbitraire, par exemple si on considère un suite énumérant $\mathbb{Q}$ ...).

Donc $a_{n+1} \geq \frac{1}{n}$, et ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geq n$. Donc $\frac{1}{a_n^2} = O(\frac{1}{n^2})$, et par comparaison, $\sum \frac{1}{a_n^2}$ converge.

24) f est bornée. Posons $M = \sup |f|$. G est bien définie car et à t fixé, $u \longmapsto e^{-u^2/2t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Avec $\theta = (x - y)/\sqrt{t}$, on a $G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\theta^2/2}\ f(x + \sqrt{t}\theta)\ d\theta$.

On en déduit par cv dominée (par $\varphi(\theta) = M\ e^{-\theta^2/2}$) que $\lim_{x\to+\infty} G(x, t) = 0$ et $\lim_{t\to 0} G(x, t) = f(x)$.

Remarque culturelle : G est la solution de l'équation de la chaleur : $\frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$, avec $G(x, 0) = f(x)$.

25) Par l'absurde : supposons que f admet un nombre fini de zéros.

Donc f ne s'annule pas sur un intervalle $[a, +\infty[$, donc est de signe constant sur cet intervalle. D'autre part, f est bornée sur $[0, a]$. Donc f ne peut être à la fois majorée et minorée, ce qui contredit f surjective.

26) a) Non : L'image continue du segment $[0, 1]$ est un segment.

b) Oui : On prend f définie par $f(x) = 0$ si $x \in]0, \frac{1}{3}]$, $f(x) = 1$ si $x \in [\frac{2}{3}, 1[$ et affine sur $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$.

c) Une fonction continue bijective sur un intervalle est nécessairement strictement monotone.

Dans ce cas, $f(]0, 1[)$ est un intervalle ouvert limité par les limites en 0^+ et 1^-.

27) Soient A et $B \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\det(A - \lambda B) = 0$.

Il suffit en effet de considérer les valeurs propres de AB^{-1} (qui sont aussi celles de $B^{-1}A$).

Si F un sev inclus dans $GL_n(\mathbb{C}) \cup \{O_n\}$, alors nécessairement, toute famille (A, B) est liée, donc la dimension de F est ≤ 1. Réciproquement, toute droite $\mathbb{C}A$ avec $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Donc $\max(\dim F) = 1$.