

Oraux blancs. Série 3.

0) Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 .

On considère $u : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, t) \mapsto u(x, t)$ de classe C^2 vérifiant :

(E) : $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$ et $u(x, 0) = \varphi(x)$ et $u(0, t) = u(1, t) = 0$.

a) On considère $f(t) = \int_0^1 u(x, t)^2 dx$. Montrer que $f'(t) \leq 0$.

b) En considérant $w = u - v$, montrer que si v vérifie aussi (E), alors $u = v$.

1) Déterminer le nombre maximal de 1 pour $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ inversible à coefficients dans $\{0, 1\}$.

2) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que $a_n \sim \alpha \ln n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, avec $\alpha > 0$.

a) Montrer que la série de terme général $\exp(-a_n)$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$.

b) Peut-on conclure si $\alpha = 1$?

3) Soient p et q projecteurs orthogonaux. Montrer que $p \circ q = 0$ implique $q \circ p = 0$.

4) On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , dans laquelle on effectue n tirages successifs sans remise. On note X_k le numéro de la boule tirée à la k -ième étape. On dit qu'il y a un pic à la k -ième étape si $X_k > \max(X_1, \dots, X_{k-1})$. On convient qu'il y a toujours un pic au premier tirage.

a) On note S_n le nombre de pics au cours des n tirages. Déterminer $P(S_n = 1)$ et $P(S_n = n)$.

b) Donner l'espérance de S_n .

5) Soient X et Y deux v.a. entières indépendantes et de même loi.

Dans quels cas $X + Y$ et $2X$ ont-elles même loi ?

6) Soit $f : [0, +\infty[$ de classe C^1 . On suppose $f(0) = 0$ et $\int_0^{+\infty} (f')^2 < +\infty$.

Montrer que $\int_0^{+\infty} \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 dt$ existe et que $\int_0^{+\infty} \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 dt \leq 4 \int_0^{+\infty} (f'(t))^2 dt$.

7) Soit $\alpha > -1$. Trouver un équivalent de $I_n = \int_0^1 (1-t)^n t^\alpha dt$ lorsque n tend vers $+\infty$.

8) Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue.

On note A l'ensemble des $a \in \mathbb{R}$ telles qu'il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = a$.

Montrer que A est un intervalle fermé.

9) Soit $f : [0, a] \rightarrow [0, b]$ bijection croissante C^1 . Calculer $\int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(x) dx$.

10) On note D l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \geq 2$.

a) L'ensemble D est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

b) Soit V un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans D . Montrer que $\dim V \leq \frac{1}{2}n(n+1)$, et donner un cas d'égalité.

11) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On pose $K = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A \text{ et } \lambda A \text{ semblables}\}$.

Montrer que K est infini ssi A est nilpotente.

12) Déterminer les fonctions continues vérifiant $(E) : \forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = f(x) + 1$.

13) Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que A et $-A$ soient semblables.

14) Existence de $J = \int_0^1 \ln(t) \ln(1-t) dt$, et montrer que $J = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$.

15) Soit P un polynôme réel. On pose $M : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R} \quad n \longmapsto \sum_{k=1}^n P(k)$.

Montrer que M est une fonction polynomiale en n .

16) On suppose F, G et H sev de E . On pose $n = \dim E$. On suppose : $\dim F + \dim G + \dim H > 2n$

Montrer que $F \cap G \cap H$ contient un vecteur non nul.

17) Montrer que tout sev est intersection d'hyperplans.

18) Soient A et $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\det A = \det B = \det(A+B) = \det(A-B) = 0$.

Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \det(xA + yB) = 0$.

19) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice de rang r vérifiant $A = A^T = A^2$.

Montrer qu'il existe $(Z_1, \dots, Z_r)$ famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que $A = \sum_{j=1}^r Z_j Z_j^T$.

20) Soient A et B projections orthogonales. Montrer que $\text{Sp}(A+B) \subset [0, 2]$.

21) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^T A$ et AA^T sont semblables.

22) a) Que dire d'une v.a. indépendante d'elle-même ?

b) Soit X une v.a. réelle positive telle que $0 < E(X^2) < +\infty$. Montrer que $P(X > 0) \geq \frac{E(X)^2}{E(X^2)}$.

23) Soient une suite de réels positifs non nuls $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \neq m, |a_n - a_m| \geq 1$.

Montrer que la série $\sum \frac{1}{a_n^2}$ converge.

24) On considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et convergeant vers 0 en $+\infty$. On rappelle que $\int_{+\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}$.

On pose $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) f(y) dy$.

Montrer que G est bien définie et bornée sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x, t)$ et $\lim_{t \rightarrow 0} G(x, t)$.

25) Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue surjective. Montrer que f admet une infinité de zéros.

26) a) Existe-t-il une fonction continue surjective de $[0, 1]$ sur $]0, 1[$?

b) Existe-t-il une fonction continue surjective de $]0, 1[$ sur $[0, 1]$?

c) Soit f une fonction continue surjective de $]0, 1[$ sur $[0, 1]$. Montrer que f n'est pas injective.

27) Déterminer la dimension maximale d'un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inclus dans $\Delta = GL_n(\mathbb{C}) \cup \{O_n\}$.