

## Oraux blancs. Série 2. Indications

1) a) Posons  $Y_n^- = \text{card}(\{X_i \mid X_i \leq k\})$  et  $Y_n^+ = \text{card}(\{X_i \mid X_i > k\})$ .

On a  $Y_n^- \leq \text{card}(\{1, 2, \dots, k\}) = k$  et  $Y_n^+ \leq \text{card}\{i \mid X_i > k\} = \sum_{i=1}^n 1_{X_i > k}$ .

Donc  $y_n = E(Y_n^- + Y_n^+) = E(Y_n^-) + E(Y_n^+) \leq k + E(\sum_{i=1}^n 1_{X_i > k}) = k + nP(X > k)$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . On choisit  $k$  de sorte que  $P(X > k) \leq \varepsilon$ , qui existe car  $\lim_{k \rightarrow +\infty} P(X > k) = 0$ .

On a alors  $y_n \leq k + n\varepsilon$ . Pour  $n$  assez grand,  $y_n \leq 2\varepsilon n$ .

b) Par Markov,  $P(X > k) \leq \frac{E(X)}{k}$ , et donc  $y_n \leq k + \frac{nE(X)}{k}$ .

On conclut en prenant  $k = \sqrt{n}$ .

2) Noter  $A$  l'événement : "L'urne contient deux boules blanches" et  $B$  : "La première boule tirée est une boule blanche". On a  $P(A \mid B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|\bar{A})P(\bar{A})} = \frac{1 \times (1/2)}{1 \times (1/2) + (1/2) \times (1/2)} = \frac{2}{3}$ .

3) L'idée est de considérer  $N = \sum_{i=1}^n 1_{A_i}$ , où  $A_i$  : le  $i$ -ième couple survit.

En effet, on ne cherche que l'espérance de  $N$  et non sa loi. Donc  $E(N) = n \sum_{i=1}^n P(A_i)$ .

La probabilité qu'un couple fixé survive est  $\frac{\binom{2n-2}{r}}{\binom{2n}{r}} = \frac{(2n-r)(2n-r-1)}{2n(2n-1)}$ .

*Remarque* : On peut aussi trouver cette probabilité sans passer par la combinatoire des parties :

En effet, en notant  $(x, y)$  ce couple et  $\Delta$  l'ensemble des personnes décédées, on a :

$$P(x \notin \Delta, y \notin \Delta) = P(x \notin \Delta)P(y \notin \Delta \mid x \notin \Delta) = \frac{(2n-r)}{2n} \frac{(2n-r-1)}{(2n-1)}.$$

On en conclut que  $E(N) = n \frac{(2n-r)(2n-r-1)}{2n(2n-1)} = \frac{(2n-r)(2n-r-1)}{2(2n-1)}$ .

4) a)  $|\phi_n(x) - \phi(x)| = |E(\phi(S_n^{(x)}) - \phi(x))| \leq E\left(K \left|S_n^{(x)} - x\right|\right) \leq KV(S_n^{(x)})^{1/2} \leq \frac{K}{2\sqrt{n}}$ .

b) Par th du transfert,  $E(\phi(S_n^{(x)})) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = P_n(x)$  polynôme en  $x$ .

Donc pour toute fonction lipschitzienne  $\phi$  sur  $[0, 1]$ ,  $\phi$  est limite uniforme de polynômes.

On en déduit pour toute fonction  $\psi$  sur  $[a, b]$ , en considérant :

$\phi(x) = \psi(a + x(b-a))$  et  $Q_n(t) = P_n\left(\frac{t-a}{b-a}\right)$  converge uniformément vers  $\psi$  sur  $[a, b]$ .

5) Deux bouts en moins à chaque étape.  $X_n$  est somme de  $n$  v.a. de Bernoulli de probabilité  $\frac{1}{2N-1}, \frac{1}{2N-3}, \frac{1}{2N-5} \dots$

6) Si  $A' = P^{-1}AP$  et  $B' = P^{-1}BP$ , alors  $AB = BA$  ssi  $A'B' = B'A'$ .

Donc  $C(A') = P^{-1}C(A)P$ , et donc  $\dim C(A') = \dim C(A)$ , car  $\varphi : M \mapsto P^{-1}MP$  isomorphisme.

On se ramène donc aux trois cas  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ , avec  $\lambda \neq \mu$ ,  $A = \lambda I_2$  et  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_2 + J$ .

Dans le premier cas,  $C(A)$  = sev des matrices diagonales (car sev propres stables par  $B$ ).

Dans le dernier cas,  $C(A) = C(J) = \text{Vect}(I_2, J)$ .

Donc les dimensions possibles sont 2 et 4.

**7)**  $A$  et  $B$  commutent donc les sev propres de  $B$  sont stables par  $A$ .

On a  $B = I_2 + \alpha S$ , où  $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  est une matrice de symétrie orthogonale.

Donc  $S = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ , où  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , et  $B = P \begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} P^{-1}$ .

*Premier cas :  $\alpha \neq 0$ .*

Comme les sev propres de  $B$  sont stables, alors  $A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}$ ,

avec  $P(\lambda) = 1 + \alpha$  et  $P(\mu) = 1 - \alpha$ , où  $P(t) = t^3 + t$ .

Le polynôme  $P$  induit une fonction bijective de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$  (car  $P'(t) > 0$  pour  $t \in \mathbb{R}$ ).

Donc  $\lambda$  et  $\mu$  sont uniques, donc  $A$  est unique.

*Second cas :  $\alpha = 0$ .*

On cherche donc  $A$  vérifiant  $A^3 + A = I_2$ .

Dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^3 + z = 1$  admet 3 racines  $\alpha$  (réelles),  $\beta$  et  $\bar{\beta}$  (avec  $\beta$  non réelle).

Comme  $A$  est réelle, on a nécessairement  $\chi_A(z) = (z - \alpha)^2$  ou  $\chi_A(z) = (z - \beta)(z - \bar{\beta})$ .

Dans le premier cas,  $A = \alpha I_2$  est l'unique solution, car sinon,  $A$  serait semblable à  $N = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ , qui ne vérifie pas l'équation, car  $A^3 + A$  serait semblable à  $N^3 + N = \begin{pmatrix} 1 & 3\alpha^2 + 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I_2$ .

Dans le second cas, toute matrice réelle de polynôme caractéristique  $(z - \beta)(z - \bar{\beta})$  convient, car diagonalisable dans  $\mathbb{C}$  et vérifie donc l'équation.

C'est le cas de la matrice  $\begin{pmatrix} \operatorname{Re} \beta & -\operatorname{Im} \beta \\ \operatorname{Im} \beta & \operatorname{Re} \beta \end{pmatrix}$  et de la matrice compagnon  $\begin{pmatrix} 0 & -|\beta|^2 \\ 1 & 2\operatorname{Re} \beta \end{pmatrix}$ .

**8)** a) On pourrait se placer dans une base de vecteurs propres, et utiliser une matrice de Van de Monde.

Mais il y a mieux : Le polynôme  $P(X) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} (X - \lambda)$  annule  $A$  et est de degré  $< n$ .

Donc la famille  $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$  est liée, et a fortiori, toute famille  $(x, Ax, \dots, A^{n-1}x)$  l'est.

b) Tout vecteur  $x = \sum_{j=1}^n e_j$ , où tous les  $\alpha_i$  non nuls, convient : la matrice de la famille  $(x, Ax, \dots, A^{n-1}x)$  est inversible (matrice de Van der Monde).

**9)**  $u$  est une symétrie, et préciser les sev propres. En déduire  $\operatorname{tr} u = \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}n(n-1) = n$ .

**10)** Notons  $u$  l'endomorphisme associé à  $A$ .

- Posons  $r = \operatorname{rg} A$ . On a  $r \in \{0, 1, 2\}$ . Si  $r = 0$ ,  $A = O_3$ .

- Supposons  $r = 1$ . On a  $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$  (sinon,  $u|_{\operatorname{Im} u}$  serait bijective). On considère un supplémentaire  $\mathbb{C}e_3$  de  $\operatorname{Ker} u$ , puis  $e_2 = u(e_3)$ , puis  $e_1$  tel que  $(e_1, e_2)$  est une base de  $\operatorname{Ker} u$ .

- Supposons  $r = 2$ . On a  $\dim \operatorname{Ker} u = 1$  et  $u^2 \neq 0$  et  $u^3 = 0$ .

On considère  $e_3 \notin \operatorname{Ker} u^2$ . On a  $(e_3, u(e_3), u^2(e_3))$  base de  $E = \mathbb{C}^3$ .

**10) bis)** On a  $\chi_{-A}(z) = \det(zI_3 + A) = -\chi_A(-z)$ .

Comme  $A$  et  $-A$  sont semblables, alors  $\chi_A(z) = z^3 - \alpha z$ .

- Si  $\alpha = 0$ ,  $A$  est nilpotente et on utilise 1) pour conclure que  $A$  et  $-A$  sont semblables.

- Si  $\alpha \neq 0$ ,  $\chi_A$  admet trois valeurs propres distinctes  $0$ ,  $\lambda$  et  $-\lambda$ , donc  $A$  est diagonalisable et ses valeurs propres sont deux à deux opposées, donc  $A$  et  $-A$  sont semblables.

*Conclusion* : Donc  $A$  et  $-A$  soient semblables ssi  $\chi_A = \chi_{-A}$ , donc ssi  $\text{tr } A = \det A = 0$ .

**11) a) Il vaut mieux éviter de se lancer dans le calcul du polynôme caractéristique de  $M$  ...**

**On cherche donc les valeurs propres en résolvant les systèmes  $MX = \lambda X$ .**

$$MX = \lambda X \text{ ssi (par blocs) } \begin{cases} X_2 = \lambda X_1 \\ AX_1 = \lambda X_2 \end{cases} \quad \begin{cases} X_2 = \lambda X_1 \\ AX_1 = \lambda^2 X_2 \end{cases}$$

On a de plus  $X \neq 0$ , c'est-à-dire  $(X_1, X_2) \neq (0, 0)$  ssi  $X_1 \neq 0$  ( du fait de la relation  $X_2 = \lambda X_1$  ).

On en déduit que  $\lambda$  est valeur propre de  $M$  ssi  $\lambda^2$  est valeur propre de  $A$ .

$$\text{On a alors } \text{Ker}(M - \lambda I_{2n}) = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 \\ \lambda X_1 \end{pmatrix}, X_1 \in \text{Ker}(A - \lambda^2 I_n) \right\}.$$

$$\text{En particulier, } \boxed{\dim \text{Ker}(M - \lambda I_{2n}) = \dim \text{Ker}(A - \lambda^2 I_n)}.$$

b) Notons  $d_\lambda = \dim \text{Ker}(M - \lambda I_{2n})$  et  $d'_\mu = \dim \text{Ker}(A - \mu I_n)$ .

$$\text{Par a), on a } \boxed{d_\lambda = d'_\mu, \text{ où } \mu = \lambda^2}.$$

On a  $M$  diagonalisable ssi  $\sum_\lambda d_\lambda = 2n$ , et  $A$  diagonalisable ssi  $\sum_\mu d'_\mu = 2n$ .

Chaque complexe  $\mu$  non nul admet deux racines carrées  $\lambda$  et  $-\lambda$ .

Or, par a), on a  $\sum d_\lambda = 2 \sum_{\mu \neq 0} d'_\mu + d_0$ . De plus,  $\sum_{\mu \neq 0} d'_\mu + d_0 \leq n$ .

Donc  $\sum d_\lambda = 2n$  ssi  $\sum_{\mu \neq 0} d'_\mu = n$  et  $d_0 = 0$ .

Donc  $M$  diagonalisable ssi  $A$  diagonalisable et inversible.

$$\text{Remarque : On a } M^{2k} = \left( \begin{array}{c|c} A^k & O_n \\ \hline O_n & A^k \end{array} \right) \text{ et } M^{2k+1} = \left( \begin{array}{c|c} O_n & A^k \\ \hline A^{k+1} & O_n \end{array} \right).$$

Ainsi, si  $P(A) = O_n$ , alors  $P(M^2) = O_n$ .

Si  $A$  est inversible et diagonalisable, alors on prend  $P(X) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda)$  annule  $A$ , et  $P(X^2)$  annule et est scindé à racines simples (ses racines sont les racines carrées des  $\lambda$ ).

**12) Traiter avec Cesaro le cas  $a_n = \alpha$ .**

Traiter par majoration le cas  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$  en utilisant le fait que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.

Conclure par linéarité (avec  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\alpha)_{n \in \mathbb{N}} + (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$ ) que la limite est  $\alpha\beta$ .

**13 a) On a nécessairement  $f(0) = 0$ .**

D'autre part,  $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}f(x)$ , donc par récurrence immédiate  $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}f(x)$ .

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right) = xf'(0).$$

En effet,  $f(u) = uf'(0) + o(u)$ , donc  $2^n f(2^{-n}x) = xf'(0) + o(1)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

On en conclut que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha x$ , avec  $\alpha = f'(0)$ .

b) On a  $\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch} x^2 + \operatorname{sh}^2 x$  et  $\operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$ , donc  $\operatorname{th}(2x) = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$ .

c) On effectue le changement de variable  $g(x) = \operatorname{th}(f(x))$ , valide car  $f(x) \in ]-1, 1[$ .

On obtient  $\operatorname{th}(f(2x)) = \operatorname{th}(2f(x))$ , c'est-à-dire  $f(2x) = 2f(x)$ .

Comme  $g$  est dérivable en 0, alors  $f$  aussi. Donc par a),  $f(x) = \alpha x$ .

On en déduit  $g(x) = \operatorname{th}(\alpha x)$ .

**14)** Posons  $N = A^{-1}B$ . La fonction  $f$  est constante ssi  $f : t \mapsto \det(I_n + tN)$  est cste.

En trigonalisant  $N$  dans  $\mathbb{C}$ , on a  $f(t) = \prod_{i=1}^n (1 + t\lambda_i)$ .

On veut  $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = 1$ . Comme  $f$  est un polynôme, ceci équivaut à  $\forall t \in \mathbb{C}, f(t) = 1$ .

Ce qui n'est vrai que si les  $\lambda_i$  sont nuls (sinon,  $f$  s'annule en au moins une valeur).

D'où la CNS :  $\operatorname{Sp}(N) = \{0\}$  dans  $\mathbb{C}$ , donc ssi  $N$  est nilpotente, c'est-à-dire  $\exists r \in \mathbb{N}^*, (A^{-1}B)^r = O_n$ .

**15)** Comme  $A$  est inversible, alors  $B$  semblable à  $-B = A^{-1}BA$ , et  $B$  inversible.

Donc les racines du polynôme caractéristique de  $B$  sont 2 à 2 opposées, et non nulles, car  $B$  inversible, donc en nombre pair (comptées avec multiplicité), c'est-à-dire  $n$  pair.

Pour  $n$  pair, on construit aisément un exemple en considérant les blocs  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

On peut noter que lorsque deux matrices anticommulent, alors  $A(E_\lambda) \subset E_{-\lambda}$ , où  $E_\lambda$  sev de  $B$ .

**16)** Si  $u$  n'est pas une homothétie, il existe  $x$  tel que  $y = u(x) \notin Kx$ .

Considérer un hyperplan  $H$  contenant  $x$  et ne contenant pas  $y$ .

**17)** On note  $f(x) + f(y) - f(x)f(y) = -(1 - f(x))(1 - f(y))$ .

Donc  $f(x + y) = f(x) + f(y) - f(x)f(y)$  équivaut à  $1 - f(x + y) = (1 - f(x))(1 - f(y))$ .

On pose  $g(x) = 1 - f(x)$ . On cherche les fonctions continues vérifiant  $g(x + y) = g(x)g(y)$ .

Si  $g(x_0) = 0$ , alors  $g$  est nulle. Sinon,  $g(x) > 0$ , car  $g(x) = g(x/2)^2$ .

En posant  $G(x) = \ln g(x)$ , on obtient  $G(x + y) = G(x) + G(y)$ , donc  $G(x) = ax$ , où  $a \in \mathbb{R}$ .

On en conclut (réciproque immédiate) que les solutions sont 1 et  $f(x) = 1 - \exp(ax)$ , où  $a \in \mathbb{R}$ .

*Remarque :* Pour deviner les solutions, on peut aussi supposer  $f$  de classe  $C^1$ .

On a alors nécessairement  $f'(x + y) = f'(x) - f'(x)f(y)$ , donc  $f'(y) = b(1 - f(y))$ , où  $b = f'(0)$ .

Donc  $f(y) = 1 + K \exp(-bx)$ , et  $K = -1$  car  $b = f'(0)$ , donc  $f(y) = 1 - \exp(ax)$ , où  $a = -b$ .

**18)** On a de façon générale  $\operatorname{Im}(A^T) = (\operatorname{Ker} A)^\perp$ , donc ici  $\operatorname{Im} A = (\operatorname{Ker} A)^\perp$ .

Donc la restriction de  $A$  à  $\operatorname{Im} A$  est un automorphisme, sans valeur propre réelle car  $\operatorname{Sp}(A) \subset \{0\}$ .

Donc  $\operatorname{Im} A$  est de dimension paire.

**19)** Utiliser les relations entre coefficients et racines.

**20)** a)  $u_n \sim \frac{a}{n}$ , où  $a = \ln x$  ; b)  $u_n = (-1)^{n+1} \frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

**21) Preuve de type Césaro.**

On traite d'abord le cas  $a_{n+1} - a_n = o(b_{n+1} - b_n)$ .

On a alors  $\forall n \geq p, |a_{n+1} - a_n| \leq \varepsilon(b_{n+1} - b_n)$ , donc par télescopage,  $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq K + \varepsilon b_n$ , où  $K$  constante.

Donc  $|a_n| \leq 2\varepsilon b_n$  pour  $n$  assez grand, donc  $a_n = o(b_n)$ .

Cas général : On pose  $a_n = Lb_n + \delta_n$ . On a  $\delta_{n+1} - \delta_n = o(b_{n+1} - b_n)$ , donc  $\delta_n = o(b_n)$  et  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow L$ .

**22) a)** La suite  $(f_n(r))_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et  $\forall n \geq 2, f_n(r) \leq (1 + r^n)f_{n-1}(r)$ .

Pour  $r < 1$ , le produit infini  $\prod(1 + r^n)$  converge. D'où l'existence de  $F(r)$ .

b)  $f_n(r)$  est un polynôme en  $r$ .

De plus, la suite des coefficients de  $f_n(r)$  de degré  $p$  est croissante et stationnaire en  $n$  pour  $n \geq p$ .

Notons  $a_p$  la valeur stationnaire.

Montrons que  $\forall r \in [0, 1[, F(r) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k$ .

On a directement  $\forall n \geq p, \sum_{k=0}^p a_k r^k \leq f_n(r) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k$  (sous réserve que la série converge).

Donc  $\sum_{k=0}^p a_k r^k \leq F(r) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k$ . Donc  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^p a_k r^k$  existe (th de la limite monotone).

**23)** On pourrait prouver  $g$  de classe  $C^n$  par récurrence via le prolongement  $C^1$  (très pénible).

Le plus élégant est d'utiliser  $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^1 f'(t) dt = \int_0^1 f'(\theta x) d\theta$ , valable en  $x = 0$ .

On conclut en utilisant le th sur les intégrales paramétrées.

**24) a)**  $X^{2n} - 1 = (X - 1)(X + 1) \prod_{k=0}^{n-1} (X^2 - 2 \cos(\frac{k\pi}{n}) X + 1)$ .

b)  $\int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos t + r^2) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 - 2r \cos(\frac{k\pi}{n}) + r^2)$  sommes de Riemann.

c) Pour  $r > 1, \ln(r^{2n} - 1) - \ln(r^2 - 1) \sim \ln(r^{2n} - 1) \sim 2n \ln r$ .

**25)** Les coefficients de  $Q_a$  sont les  $P^{(k)}(a)/k!$ . Or, pour tout  $0 \leq k \leq n, P^{(k)}(a)/k! \rightarrow 1$  lorsque  $a \rightarrow +\infty$ .

**26)** On a  $X_{n+1} = AX_n$ , avec  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  diagonalisable.

Donc  $u_n$  et  $v_n$  sont en  $O(\lambda^n)$ , où  $\lambda$  plus grande valeur propre en module de  $A$ , et  $R \geq \frac{1}{|\lambda|}$ .

Avec  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$  et  $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$ ,  $\begin{cases} f(x) = u_0 + xf(x) - xg(x) \\ g(x) = v_0 + xf(x) - 2xg(x) \end{cases}$ , d'où on déduit  $f(x)$  et  $g(x)$ .

**27)** S'il existe au moins une solution  $M$  de trace non nulle, la matrice  $A$  est symétrique.

Posons  $M = S + T$ , avec  $S$  symétrique et  $T$  antisymétrique. Alors  $M$  vérifie (\*) ssi  $S = \frac{1}{2}(\text{tr } S) A$

Donc  $\Delta(O_n) = \{S + T, \text{ avec } S \text{ symétrique de trace nulle et } T \text{ antisymétrique}\}$ .

Si  $A \in S_n(\mathbb{R})$  de trace 2,  $\Delta(A) = \{A + T, T \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\}$ , avec  $T$  antisymétrique (donc de trace nulle).

Dans les autres cas,  $\Delta(A) = \{O_n\}$ .

**28)** Pour  $|z| < 1, |z|^{(n!)} \leq |z|^n$ , donc  $\sum z^{(n!)}$  converge absolument et  $R \geq 1$ .

Pour  $|z| > 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} |z|^{(n!)} = +\infty$ , donc  $R \leq 1$ . D'où  $R = 1$ .