

Oraux blancs. Série 2

1) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de même loi.

On pose $Y_n = \text{card}\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ et $y_n = E(y_n)$.

a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $y_n \leq k + nP(X > k)$. En déduire $y_n = o(n)$.

b) On suppose X d'espérance finie. Montrer que $y_n = O(\sqrt{n})$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

2) Une urne contient une boule blanche et une deuxième, blanche ou noire avec la probabilité $\frac{1}{2}$. On effectue deux tirages successifs sans remise. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage sachant que le premier tirage a donné une boule blanche.

3) On considère n couples ($2n$ personnes). r personnes décèdent.

Déterminer le nombre moyen N de couples restants.

4) a) Soit ϕ une fonction K -lipschitzienne sur $[0, 1]$. Pour tout $x \in [0, 1]$, on suppose connue une famille $(X_n^{(x)})_{n \geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(x)$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n^{(x)} = \frac{1}{n}(X_1^{(x)} + \dots + X_n^{(x)})$.

On pose $\phi_n(x) = E(\phi(S_n^{(x)}))$. Montrer que $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers ϕ sur $[0, 1]$.

b) En déduire une preuve du théorème de Stone-Weierstrass pour les fonctions lipschitziennes : toute fonction lipschitzienne sur un segment $[a, b]$ est limite uniforme de fonctions polynômes.

5) Un sac contient N cordes. A chaque étape, on choisit au hasard deux extrémités de cordes et on les noue. On dit qu'il y a une boucle si on a noué les extrémités d'une même corde.

Déterminer l'espérance du nombre X_n de boucles après n étapes.

6) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Déterminer les dimensions possibles de $C(A) = \{B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid AB = BA\}$.

7) Résoudre $A^3 + A = B$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, où $B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

8) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable.

a) On suppose que χ_A admet une racine multiple. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $(x, Ax, \dots, A^{n-1}x)$ est liée.

b) On suppose que les racines de χ_A sont simples. Trouver $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $(x, Ax, \dots, A^{n-1}x)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

9) Calculer la trace de u , où $u : \mathcal{M}_n(K) \rightarrow \mathcal{M}_n(K)$ $A \mapsto A^T$.

10) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ nilpotente.

Montrer que $A = O_3$ ou A semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10) bis) Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ pour que A et $-A$ soient semblables.

11) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $M = \left(\begin{array}{c|c} O_n & I_n \\ \hline A & O_n \end{array} \right)$.

a) Montrer que λ est valeur propre de M si et seulement si λ^2 valeur propre de A .

b) Donner une CNS sur A pour que M soit diagonalisable.

12) Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \alpha$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \beta$.

Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

13) a) Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que $f(2x) = 2f(x)$.

b) Exprimer $\text{th}(2x)$ en fonction de $\text{th}(x)$.

c) Déterminer les fonctions continues $g : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ dérivables en 0 telles que $g(2x) = \frac{2g(x)}{1 + g(x)^2}$.

14) Soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $f : t \mapsto \det(A + tB)$ est constante ssi $\exists r \in \mathbb{N}^*, (A^{-1}B)^r = O_n$.

15) Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels il existe deux matrices A et $B \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $AB + BA = O_n$.

16) Soit E un ev de dimension finie. Déterminer les $u \in \mathcal{L}(E)$ laissant stable tout hyperplan de E .

17) Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f(x + y) = f(x) + f(y) - f(x)f(y)$.

18) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que $\text{rg } A$ est pair.

19) Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$, où $f(x, y) = (x + y, xy)$.

20) Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ définies par :

a) $u_n = x^{1/n} - 1$, où $x > 0$

b) $v_n = \cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 1})$

21) Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = L$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$.

22) On considère $f_n(r)$ définie par $f_0(r) = 0$, $f_1(r) = r$ et $\forall n \geq 2$, $f_n(r) = f_{n-1}(r) + r^n f_{n-2}(r)$.

a) Justifier l'existence de $F(r) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(r)$ pour tout $r \in [0, 1[$.

b) Montrer que F est DSE sur $[0, 1[$.

23) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $f(0) = 0$. Montrer que $g : x \rightarrow \frac{f(x)}{x}$ est C^∞ .

24) (*X-ESPCI*) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser $X^{2n} - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

b) Soit $r > 1$. Montrer que $\int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos t + r^2) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \ln \left(\frac{r^{2n} - 1}{r^2 - 1} \right)$.

c) En conclure que pour tout $r > 1$, on a $\int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos t + r^2) dt = 2\pi \ln r$.

25) (*X-ESPCI*) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ unitaire. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $Q_a(X) = P(X + a)$.

Montrer que pour a assez grand, tous les coefficients de Q_a sont positifs.

26) (*Mines*) On considère $(u_0, v_0) \neq (0, 0)$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - v_n$ et $v_{n+1} = u_n - 2v_n$.

Déterminer les rayons de cv et les sommes de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ et de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$.

27) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver l'ensemble $\Delta(A)$ des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M + M^T = (\text{tr } M) A$.

28) Déterminer le rayon de convergence de $\sum z^{(n!)}$.