

Oraux blancs. Série 1.

1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul tel que $(X-1)^2$ divise P . Montrer que P admet au moins trois coefficients non nuls.

2) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, avec $0 < p < 1$.

Soit A un événement tel que $0 < P(A) < 1$.

Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(A \cap (X_n = 1)) \in]0, p[$.

3) On considère n couples ($2n$ personnes). r personnes décèdent. Déterminer le nombre moyen N de couples restants.

4) On considère $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O_{n-r,r} & O_{n-r} \end{array} \right)$, avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ diagonalisable et $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{C})$.

On suppose A inversible. Montrer que M est diagonalisable.

5) Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6) Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulles. On note $\theta : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $M \mapsto M + \text{tr}(AM)B$.

Cette application admet-elle des valeurs propres ? Donner une CNS pour que θ soit diagonalisable.

7) Soit $Z_{n,x}$ une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, x)$, où $x \in [0, 1]$. Soit P un polynôme réel.

a) Montrer qu'il existe un polynôme Q_n tel que pour tout $x \in [0, 1]$, $Q_n(x) = E \left(P \left(\frac{Z_{n,x}}{n} \right) \right)$.

b) Montrer que $\deg Q_n \leq \deg P$.

c) Montrer que $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

8) On considère deux v.a. indépendantes A et B de même loi uniforme à valeurs dans $\mathcal{P}([1, n])$.

Déterminer $E(X)$, où $X = \text{card}(A \cup B)$.

9) On pose $E = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, A^n = I_2\}$ et $F = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \forall \lambda \in \text{Sp}(A), |\lambda| = 1\}$.

a) Montrer que $E \subset F$.

b) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n} = \alpha$. En déduire que F est inclus dans l'adhérence de E .

c) Montrer que F est fermé. Conclure.

10) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\text{tr } A = 0$.

Montrer qu'il existe N_1 et N_2 nilpotentes telles que $A = N_1 + N_2$.

11) Soit $A \in \mathbb{R}_n[X]$ scindé à racines *simples* de degré n . On considère φ_A l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui à un polynôme P associe le reste de la division euclidienne de XP par A . Déterminer le spectre de φ_A .

12) a) Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, $0 \leq r < d$ et $\omega = e^{2i\pi/d}$.

Montrer que $P(Y \equiv r [d]) = \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} \frac{1}{\omega^{kr}} E(\omega^{kY})$.

b) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $[1, d]$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Déterminer la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \equiv r [d])$.

13) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \text{sh} \left(\frac{1}{n} \right) + \text{sh} \left(\frac{1}{n+1} \right) + \text{sh} \left(\frac{1}{n+2} \right) + \dots + \text{sh} \left(\frac{1}{3n} \right)$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

14) a) On pose $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$. La fonction f est-elle continue sur son ens de définition D ?

b) L'application f est-elle de classe C^1 sur D ? Déterminer la limite de f' en 0^+ .

15) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $(E_n) : \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = 1$.

a) Montrer que (E_n) possède une unique solution sur $[0, 1]$, qu'on note x_n .

b) Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.