

Oraux blancs. Série 0. Indications/Corrigé

Centrale PC-PSI

1) L'image d'une matrice est l'ev engendré par les vecteurs colonnes. D'où :

On a $\text{Im } M \subset \text{Im} \left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right) + \text{Im} \left(\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \right)$, donc $\text{rg } M \leq \text{rg} \left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right) + \text{rg} \left(\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \right)$.

On a aussi $\text{rg} \left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} A^T & B^T \end{pmatrix} \right) \leq \text{rg } A^T + \text{rg } B^T = \text{rg } A + \text{rg } B$. De même pour $\text{rg} \left(\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \right)$.

Autre preuve : Pour deux matrices M_j , on a : $\text{rg}(\sum_{j=1}^p M_j) \leq \sum_{j=1}^p \text{rg}(M_j)$.

En effet, $\text{Im}(\sum_{j=1}^p M_j) \subset \sum_{j=1}^p \text{Im } M_j$, donc $\text{rg}(\sum_{j=1}^p M_j) \leq \dim(\sum_{j=1}^p \text{Im } M_j) \leq \sum_{j=1}^p \text{rg}(M_j)$.

Ici, on a $M = \left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & O \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c} O & C \\ \hline O & O \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c} O & O \\ \hline B & O \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c} O & O \\ \hline O & D \end{array} \right)$.

Et on conclut en utilisant $\text{rg} \left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & O \end{array} \right) = \text{rg } A$.

2) a) $X^3 + X^2 + X$ annule f , donc 0 est la seule valeur propre réelle éventuelle.

Si f était diagonalisable, alors $f = 0$ et X serait polynôme annulateur.

f est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et $\text{Sp}(f) \subset \{0, j, j^2\}$.

On a $\dim E_j = \dim E_{j^2} \leq 1$, et $\text{rg } f = \dim E_j + \dim E_{j^2}$. Comme f non nulle, alors $\text{rg } f = 2$.

Autre preuve pour prouver $\text{rg } f = 2$: on a $1 \leq \dim \text{Ker } f \leq 2$ car $0 \in \text{Sp}(f)$ et f non nulle.

Si on avait $\dim \text{Ker } f = 2$, alors le polynôme caractéristique de f serait de la forme $X^2(X - \lambda)$, et donc $\lambda = 0$ car $\text{Sp}(f) = \{0\}$ sur $\mathbb{R}$, donc f nilpotente de rang 1, donc $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$ et $f^2 = 0$, ce qui contredit le fait que f n'admet pas de polynôme annulateur de degré < 3 .

b) On a $(f^2 + f + \text{Id}) \circ f = 0$, donc $\text{Im } f \subset \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id})$.

Par a), $\dim \text{Ker } f = 1$ et donc $\dim \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}) \geq 2$.

Or, on a $\text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id})$: si $f(x) = 0$, alors $(f^2 + f + \text{Id})(x) = x$.

On en déduit $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id})$.

c) Soit $x \in \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id})$ non nul. Sinon, $f(x) = \lambda x$, avec $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$: absurde.

d) On conclut en prenant une base $(y, x, f(x))$ où $\mathbb{R}y$ base de $\text{Ker } f$.

3) a) $X^k - 1$ est scindé à racines simples, donc M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, et $\text{Sp}(M) \subset U_d$.

On note λ et μ les racines de χ_M . On a λ et $\mu \in U_d$, donc $|\text{tr } M| = |\lambda + \mu| \leq 2$.

b) On a $\det M = \lambda\mu$, donc $|\det M| = 1$. Comme $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, alors $\text{tr } M$ et $\det M \in \mathbb{Z}$.

De plus, si $|\text{tr } M| = 2$, alors $\lambda = \mu$, donc $M = \lambda I_2$, avec $\lambda \in \{-1, 1\}$, et $d = 1$ ou 2 .

On suppose désormais $|\text{tr } M| < 2$.

Si $\det M = -1$, alors λ et μ sont réels, donc $\{\lambda, \mu\} = \{-1, 1\}$, et $\alpha = 0$, $d = 2$.

Sinon, $\det M = 1$. On a alors $\chi_M(z) = z^2 - \alpha z + 1$, avec $\alpha = \text{tr } M \in \{-1, 0, 1\}$.

On obtient alors $\text{Sp}(M) = \{i, -i\}, \{e^{2i\pi/3}, e^{-2i\pi/3}\}$ ou $\{e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3}\}$, donc $d \in \{4, 3, 6\}$.

Les valeurs 4, 3, 6 sont atteintes respectivement par les matrices compagnons

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc l'ensemble des valeurs possibles de d est $\{1, 2, 3, 4, 6\}$.

4) Posons $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. On a $|P(e^{i\theta})|^2 = P(e^{i\theta})\overline{P(e^{i\theta})} = \sum_{k=0}^n |a_k|^2 + \sum_{j \neq k} a_k \overline{a_j} \exp(i(k-j))\theta$.

Donc $\int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi \sum_{k=0}^n |a_k|^2$.

On a $a_0 = 1$. On a aussi $\sum_{k=1}^n a_k = -1$, donc $n \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \geq (\sum_{k=1}^n |a_k|)^2$, donc $\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \geq \frac{1}{n}$.

Donc $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta \geq 1 + \frac{1}{n}$, d'où on déduit (par l'absurde) que $\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |P(e^{i\theta})|^2 \geq 1 + \frac{1}{n}$.

5) On montre par récurrence que $0 \leq u_n \leq n + n_0$. On a donc $u_n = O(n)$.

D'où $u_{n+1} = O(\sqrt{n})$, c'est-à-dire $u_n = O(\sqrt{n})$.

D'où $\sqrt{n} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{n + O(\sqrt{n})}$, d'où $u_n \sim \sqrt{n}$.

On a alors $\sqrt{n} + \sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \leq u_{n+1} \leq \sqrt{n + \sqrt{n} + o(\sqrt{n})}$, d'où on déduit $u_{n+1} = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$.

Comme $\sqrt{n-1} = \sqrt{n} + o(1)$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}$.

6) a) On a $\left| \int_0^1 t^n P(t) dt \right| \leq M \int_0^1 t^n dt = \frac{M}{n+1}$, où $M = \sup_{t \in [0, 1]} |P(t)|$.

- On vérifie d'abord que les termes existent, ce qui résulte de $\int_0^1 t^n P(t) dt = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

- La plupart des propriétés des normes sont immédiatement vérifiées. On s'intéresse ici aux points délicats :

- *Définie positivité* : Si $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n P(t) dt = 0$, alors $\int_0^1 P(t)^2 dt = 0$, donc $P = 0$.

Remarque : En effet, P est orthogonal aux t^n pour $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$, donc à lui-même par linéarité.

- *Inégalité triangulaire pour M* : On sait que $\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)^2} \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2} + \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2}$

pour toutes suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de carrés sommables : en effet, il s'agit de l'inégalité triangulaire pour la

norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle a, b \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$.

b) On a $\|X^n\| = 1$, $N(X^n) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{n+k+1} = \frac{1}{n+1}$ et $M(X^n) = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+k+1}\right)^2}$.

Par comparaison avec une intégrale, on a $M(X^n) \sim \sqrt{\frac{1}{n}}$. Donc les normes sont 2 à 2 non équivalentes.

X-PSI

1) On considère $Y = \sum_{i=1}^n X_i v_i$, avec X_i v.a. de Rademacher indépendantes. On a $E(\|Y\|^2) = n$.

2) *Première preuve* : $\sum_{i < j < k} \binom{n}{k} \binom{k}{j} \binom{j}{i} = 4^n$.

Seconde preuve : Pour tout $x \in E$, on associe 0, 1, 2, 3 selon l'appartenance de x à A , $B \setminus A$, $C \setminus B$ et $E \setminus C$.

3) *Première méthode* : On commence par considérer n couples au lieu de n paires :

il y a $\binom{2n}{n} \times n!$ couples $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$ formant une partition, donc $N = \binom{2n}{n} \times n! \times \frac{1}{2^n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

Seconde méthode : Le nombre de n -uplets de paires formant une partition est : $\binom{2n}{2} \binom{2n-2}{2} \dots \binom{2}{2}$.

$$\text{Donc } N = \binom{2n}{2} \binom{2n-2}{2} \dots \binom{2}{2} \times \frac{1}{n!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

4) a) On construit une décomposition en choisissant n_1 et on est alors ramené à une décomposition de $n - n_1$. On

a pour $n \geq 1$, $a_n = \sum_{k=1}^n a_{n-k}$, donc $\forall n \geq 2$, $a_n = 2a_{n-1}$.

Or, $a_0 = 1$ et $a_1 = 1$. Donc $a_n = 2^{n-1}$.

Preuve directe : On associe à la décomposition $n = n_1 + \dots + n_r$ l'ensemble $\{n_1, n_1 + n_2, \dots, n_1 + n_2 + \dots + n_{r-1}\}$.

On obtient ainsi une bijection de l'ensemble des décompositions sur l'ensemble des parties de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

b) On reprend la même méthode qu'au a).

On associe à la décomposition $n = n_1 + \dots + n_r$ l'ensemble $\{n_1, n_1 + n_2, \dots, n_1 + n_2 + \dots + n_{r-1}\}$.

On obtient ainsi une bijection sur l'ensemble des parties de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ de cardinal $r-1$.

$$\text{Donc } b_n = \binom{n-1}{r-1}.$$

$$5) \text{ a) } P(S_{2p} = 0) = \frac{1}{4^p} \binom{2p}{p} \sim \frac{\lambda}{\sqrt{p}}. \text{ On a } N = \sum_{p=1}^{+\infty} 1_{S_{2p}=0}.$$

$$\text{On a } N \geq \sum_{k=1}^p P(S_{2k} = 0), \text{ donc } E(N) = +\infty, \text{ car } \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{\sqrt{p}} = +\infty.$$

$$\text{b) Posons } T = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid S_k = 0\} \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}.$$

L'idée est qu'une fois le premier retour à l'origine effectué, on est ramené à chercher s'il y a à nouveau un retour.

On utilise donc :

$$\text{On a } P(N \geq 2) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(\exists k > j, S_k = 0, T = j) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(\exists k > j, S_k = 0 \mid T = j) P(T = j).$$

$$\text{Or, } P(\exists k > j, S_k = 0 \mid T = j) = P(\exists k > j, \sum_{i=j+1}^k X_i = 0 \mid T = j) = P(\exists k > j, \sum_{i=j+1}^k X_i = 0), \text{ car } T = f(X_1, \dots, X_j) \text{ indépendant de } (X_{j+1}, \dots, X_k).$$

$$\text{Donc } P(\exists k > j, S_k = 0 \mid T = j) = P(\exists k > j, \sum_{i=j+1}^k X_i = 0) = P(\exists k > 0, \sum_{i=1}^k X_i = 0) = P(N \geq 1).$$

$$\text{Donc } P(N \geq 2) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(N \geq 1) P(T = j) = P(N \geq 1)^2.$$

$$\text{c) } P(N \geq k) = P(N \geq 1)^k. \text{ Si on avait } P(N \geq 1) < 1, \text{ alors } E(N) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(N \geq k) \text{ convergerait.}$$

$$\text{Donc } P(N \geq 1) = 1, \text{ donc } P(N \geq k) = 1, \text{ et par continuité décroissante, } P(N = +\infty) = 1.$$

$$6) \text{ On a } 10^p \leq 2^k < 2 \cdot 10^p \text{ ssi } p\alpha \leq k < 1 + p\alpha, \text{ où } \alpha = \log 10 = \frac{\ln 10}{\ln 2} > 1.$$

Il existe un unique entier k tel que $p\alpha \leq k < 1 + p\alpha$.

Donc 2^k commence par un chiffre 1 ssi il existe un entier p tel que $k = \lceil p\alpha \rceil$.

$$\text{Donc } P(A_n) = \frac{1}{n} \text{card}\{p \in \mathbb{N}^* \mid \lceil p\alpha \rceil \leq n\}.$$

$$\text{Comme } (1 + p\alpha \leq n) \Rightarrow (\lceil p\alpha \rceil \leq n) \Rightarrow (p\alpha \leq n), \text{ alors } \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n-1}{\alpha} \right\rfloor \leq P(A_n) \leq \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor.$$

$$\text{D'où par pincement } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = \frac{1}{\alpha}.$$

7) a) $|f(t) \exp(itx)| \leq |f(t)|$, donc F est bien définie, et $|F(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt$.

b) On a $\forall x > 0$, $F(x) = \int_a^b f(t) \exp(itx) dt = \left[\frac{f(t)}{ix} \exp(itx) \right]_a^b - \int_a^b \frac{f'(t)}{ix} \exp(itx) dt$.

Donc $|F(x)| \leq \frac{K}{x}$, où $K = |f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)| dt$.

c) L'idée est d'écrire $F(x) = \int_{-\infty}^{-r} f(t) \exp(itx) dt + \int_{-r}^r f(t) \exp(itx) dt + \int_r^{+\infty} f(t) \exp(itx) dt$.

Pour r fixé, par la même preuve qu'au b), on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r f(t) \exp(itx) dt = 0$.

Or, $\left| \int_{-\infty}^{-r} f(t) \exp(itx) dt + \int_r^{+\infty} f(t) \exp(itx) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{-r} |f(t)| dt + \int_r^{+\infty} |f(t)| dt$.

Comme f est intégrable, il existe $r > 0$ tel que $\int_{-\infty}^{-r} |f(t)| dt + \int_r^{+\infty} |f(t)| dt \leq \varepsilon$.

Remarque : Il est essentiel ici d'obtenir un r indépendant de x de sorte que :

$\forall x, \left| \int_{-\infty}^{-r} f(t) \exp(itx) dt + \int_r^{+\infty} f(t) \exp(itx) dt \right| \leq \varepsilon$.

Or, par b), pour x assez grand, $\left| \int_{-r}^r f(t) \exp(itx) dt \right| \leq \varepsilon$. Donc $|F(x)| \leq 2\varepsilon$ pour x assez grand.

8) a) Supposons $\sum_{(i_1, \dots, i_d) \in E_{n,d}} \alpha_{(i_1, \dots, i_d)} x_1^{i_1} \dots x_d^{i_d} = 0$.

En considérant comme un polynôme en x_d , on a $\forall m \leq n$, $\sum_{(i_1, \dots, i_d) \in E_{m,d-1}} \alpha_{(i_1, \dots, i_d)} x_1^{i_1} \dots x_{d-1}^{i_{d-1}} = 0$.

Par récurrence, on obtient $\alpha_{(i_1, \dots, i_d)} = 0$ pour tout $(i_1, \dots, i_d)$. Donc $V_{n,d}$ forme une famille libre.

Autre preuve (plus simple) pour prouver l'indépendance linéaire :

En appliquant $\frac{\partial^n}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_d^{j_d}}$ à $\sum_{(i_1, \dots, i_d) \in E_{n,d}} \alpha_{(i_1, \dots, i_d)} x_1^{i_1} \dots x_d^{i_d}$, on obtient $\alpha_{(j_1, \dots, j_d)} i_1! \dots i_d!$, d'où $\alpha_{(j_1, \dots, j_d)} = 0$.

On a $\text{card } V_{n,d} = \binom{n+d-1}{d-1}$. Une preuve consiste à considérer $(i_1, \dots, i_d) \mapsto (i_1 + 1, i_1 + i_2 + 2, \dots, i_1 + \dots + i_{d-1} + d - 1)$

qui réalise une bijection de $V_{n,d}$ sur l'ensemble des $(d-1)$ -parties de $\llbracket 1, n+d-1 \rrbracket$.

b) Montrons que $\Delta(V_{n,d}) = V_{n-2,d}$. On vérifie aisément que $\Delta(V_{n,d}) \subset V_{n-2,d}$

On montre par récurrence (pour l'ordre lexicographique) que $\forall (j_1, \dots, j_d) \in E_{n-2,d}$, $x_1^{j_1} \dots x_d^{j_d} \in \Delta(V_{n,d})$.

On a $\Delta(x_1^{i_1} \dots x_d^{i_d}) = \sum_{j=1}^d i_j(i_j - 1) x_1^{i_1} \dots x_j^{i_j-2} \dots x_d^{i_d}$.

Supposons que les $(j_1, \dots, j_d) \in E_{n-2,d}$ tels que $(j_1, \dots, j_d) < (i_1, \dots, i_d - 1)$, $x_1^{j_1} \dots x_d^{j_d} \in \Delta(V_{n,d})$.

Alors, si $i_d \geq 2$, on obtient par hyp de rec forte que $x_1^{i_1} \dots x_d^{i_d-2} \in E_{n-2,d}$.

On conclut ensuite en utilisant aussi une récurrence sur d (on peut supposer que $\Delta(V_{n,d-1}) = V_{n-2,d-1}$).

Oraux X-MP

1) a) Montrons qu'il suffit de modifier un coefficient pour obtenir une matrice inversible.

Il existe i tel que le cofacteur C_{i1} soit non nul (puisque $\det M = \sum_{i=1}^n a_{i1} C_{i1}$ est non nul).

On considère $f : t \mapsto \det(M + tE_{ij}) = \det(M_j + t E_i, M_1, M_2, \dots, M_n) = \det M + t C_{i1}$.

Il existe donc t tel que $f(t) = 0$, c'est-à-dire $M' = M + tE_{ij}$ inversible.

Donc en modifiant le seul coefficient d'indice $(i, 1)$, on obtient une matrice M' inversible.

b) Posons $r = \text{rg } M < n$. Montrons que le nombre minimum de coefficients à modifier vaut $n - r$.

On a $\text{rg}(M + N) \leq \text{rg } M + \text{rg } N$, donc si $M + N$ inversible, alors $\text{rg } N \geq n - r$

Or, en changeant p coefficients à M , on ajoute à M une matrice N de rang $\leq p$. Donc $p \geq n - r$.

Réciproquement, par le théorème de la base incomplète, il existe $(M_j)_{j \in J}$ une base de $\text{Im } J$ de cardinal r et une famille $(E_j)_{j \in I}$ de cardinal $n - r$ telle que $(M_j)_{j \in J} \cup (E_i)_{i \in I}$ base de K^n .

Quitte à réordonner, supposons $\text{Im } M = \text{Vect}(M_1, \dots, M_r)$ et $I = \{i_{r+1}, \dots, i_n\}$.

On considère alors $M' = (M_1, \dots, M_r, M_{r+1} + E_{i_{r+1}}, \dots, M_n + E_{i_n})$.

Les colonnes $M_{r+1}, \dots, M_n$ sont combinaisons linéaires de $M_1, \dots, M_r$.

D'où $\text{Vect}(M') = \text{Vect}(M'_1, \dots, M'_n) = \text{Vect}(M_1, \dots, M_r) + \text{Vect}(E_{i_{r+1}}, \dots, E_{i_n}) = K^n$, donc M' inversible.

2) On a $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{1-1/n}} dx$, en utilisant sur $]0, +\infty[$ le changement de variable $t = x^{1/n}$, avec $dt = \frac{1}{n} x^{1/n-1}$.

Par IPP, on obtient $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^{2-1/n}} dx$.

On applique le th de convergence dominée à la suite $(\int_0^{+\infty} f_n dx)_{n \geq 2}$, où $f_n(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^{2-1/n}}$.

On a en particulier domination :

$$\forall n \geq 2, \forall x \in]0, +\infty[, |f_n(x)| \leq \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & \text{si } x \in]0, 1] \\ \frac{2}{x^{3/2}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}, \text{ et } \varphi \text{ intégrable sur }]0, +\infty[.$$

Par convergence dominée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$, qui vaut $\frac{\pi}{2}$.

3) Il y a au moins n entiers $k \in \llbracket n, 3n \rrbracket$ tels que $f(k) \geq n$.

On a alors $\sum_{k=n}^{3n} \frac{f(k)}{k^2} \geq \frac{n^2}{(3n)^2} = \frac{1}{9}$. Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^2} = +\infty$ (sinon, on aurait $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{3n} \frac{f(k)}{k^2} = 0$).

4) a) Si $P(X) \in E$, alors $P(-X) \in E$, donc $a \in A \Rightarrow (-a) \in A$.

Si $P(X) \in E$, alors $P(\frac{1}{X})X^n \in E$, donc $a \in A \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{1}{a} \in A$. Et $0 \in A$, car $X \in E$.

b) Supposons a racine de $P(X) = \sum_{k=0}^n u_k X^k$, avec $u_n \in \{-1, 1\}$.

On a $|a|^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a|^k$, donc $|a| \leq 2$, car $2^n > \sum_{k=0}^{n-1} 2^k$.

c) Par a) et b), $A \subset]-2, -\frac{1}{2}[\cup\{0\}\cup]\frac{1}{2}, 2[$.

5) a) On a $K_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k$, où $b_k = \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k}$.

Donc $|K_n(e^{i\theta})|^2 = \sum_{k=0}^n |b_k|^2 + 2 \sum_{0 \leq j < k \leq n} \text{Re}(\overline{b_j} b_k e^{i(k-j)\theta})$. Donc $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |K_n(e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{k=0}^n |b_k|^2 = g_n$.

b) Posons $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Ainsi $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est le rproduit de Cauchy de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de $(1)_{n \in \mathbb{N}}$.

On a donc pour tout $|z| < 1$, $F(z) = \frac{f(z)}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n z^n$.

Mais on a aussi $K_n(z)^2 = \frac{1}{1-z} + o(z^n)$, donc $F_n(z) = K_n(z)^2 f(z) = \sum_{k=0}^n A_n z^n + o(z^n)$.

Ainsi, $F_n(z)$ et $F(z)$ sont deux séries entières ayant les mêmes coefficients d'indices $\leq n$.

Donc $A_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} F_n(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$ pour tout $0 < r < 1$, donc $|A_n| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |K_n(re^{i\theta})|^2 d\theta$.

En faisant tendre r vers 1^- , on obtient bien $|A_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |K_n(e^{i\theta})|^2 d\theta = g_n$.

6) a) Par Taylor-Lagrange, $|f(t+1) - f(t) - f'(t)| \leq \frac{1}{2} \sup |f''|$, donc $|f'(t)| \leq 2 \sup |f| + \frac{1}{2} \sup |f''|$.

b) On a $\int_a^b f'(t)^2 dt = [f(t)f'(t)]_a^b - \int_a^b f(t)f''(t) dt$. On a $\left| \int_a^b f(t)f''(t) dt \right| \leq \sqrt{\left(\int_{\mathbb{R}} f(t)^2 dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} f''(t)^2 dt \right)}$.

Pour conclure, il suffit de prouver qu'il existe deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} [f(t)f'(t)]_{b_n}^{a_n} = 0$.

On a $f(t)f'(t) = \frac{1}{2}(f(t)^2)'$. Il suffit donc de prouver la propriété suivante :

Si g est intégrable et C^1 , il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} g'(a_n) = 0$.

Sinon, il existerait $\varepsilon > 0$ tel que $|g'(t)| \geq \varepsilon$ pour t assez grand. Donc (via le TVI), on aurait $\lim_{+\infty} g = +\infty$, ce qui contredit g intégrable.

Remarque : On n'a pas nécessairement $\lim_{+\infty} f f' = 0$.