Exercices

1) Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum 2^{-n} z^{(n^2)}$, $\sum 2^{(-1)^n n}\ z^n$ et $\sum 2^{\lceil \ln n \rceil}\ z^n$.

2) Déterminer les fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in [0,1],\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.

3) Déterminer un équivalent de $a_n = \left(\sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k!}\right)^{1/n}$.

4) Pour P et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} (P(k) + P(0))(Q(k) + Q(0))$.

Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer une BON $(Q_0, ..., Q_n)$.

5) Un centre d'appels cherche à contacter n personnes. Chaque personne a la probabilité $p \in]0,1[$ de répondre. On note X le nombre de personnes ayant répondu à la première vague d'appels. Le centre lance un nouvel appel aux personnes n'ayant pas répondu la première fois. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant répondu la deuxième fois mais pas la première.

a) Donner la loi de X. Déterminer $P(Y = k \mid X = i)$ pour $(i,k) \in \{0, \ldots, n\}^2$.

b) Soit $Z = X + Y$. Déterminer la loi de Z.

6) Soit $\theta > 0$.

Soit $K_n = \sum_{k=0}^{n-1} Z_k$, où les Z_k sont des v.a. indépendantes de Bernoulli, avec Z_k de paramètre $\dfrac{\theta}{k+\theta}$.

a) Déterminer $P(K_n = 1)$.

b) Soit G_n la fonction génératrice de K_n. Montrer que $G_n(x) = \dfrac{L_n(\theta x)}{L_n(\theta)}$, où $L_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} (x + k)$.

c) Calculer $E(K_n)$ et $V(K_n)$. Donner des équivalents de $E(K_n)$ et $V(K_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

d) Étudier alors le comportement de la suite $\left(\dfrac{K_n}{\ln n}\right)$ en $+\infty$.

7) (*Centrale*) On considère $I_n(x) = \int_0^{\pi/2} t^x\ (\cos t)^n\ dt$.

a) Donner une CNS pour que $I_n(x)$ soit bien définie.

b) (*Python*) Écrire une fonction PYTHON qui calcule $I_n(x)$.

Représenter la courbe des $(\ln n, \ln I_n(x))_{0 \le n \le 100}$ pour $x \in \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$.

Peut-on conjecturer $I_n(x) \sim C\ n^\alpha$ lorsque n tend vers $+\infty$, où C et α dépendent de x.

c) Déterminer, pour $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\lim_{n\to+\infty} t^x\ \left(\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$.

d) Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $\forall t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $|\cos t - 1| \ge kt^2$.

e) Montrer que $I_n(x) \sim C\ n^\alpha$ en exprimant C en fonction de $\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} t^{y-1} e^{-t}\ dt$.

7) bis) Montrer que $I(x) = \int_0^{\pi/2} t^x \ (\cos t)\ dt$ est DSE en $x = 0$.

8) On considère $N+1$ urnes. L'urne d'indice k contient k boules blanches et $(N-k)$ boules rouges.

On choisit une urne selon la loi uniforme, puis on tire deux boules avec remise.

On suppose que la première boule tirée est blanche.

Calculer la probabilité p que la seconde boule soit aussi blanche.

Trouver la limite lorsque N tend vers $+\infty$.

9) Soit un entier $n \geq 3$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

a) On les tire une à une sans remise.

On note X le nombre de tirages effectués pour obtenir les boules de numéros $1, 2, 3$. Déterminer l'espérance de X.

b) Même question mais en procédant avec remise.

10) On répartit n objets dans $(n-1)$ boîtes. Déterminer la probabilité p qu'aucune boîte ne soit vide.

11) Un panier contient r pommes rouges et v pommes vertes. On mange les pommes une par une, en choisissant une pomme au hasard à chaque étape. On s'arrête lorsqu'il ne reste que des pommes rouges dans le panier. Quelle est la probabilité p qu'il reste n pommes rouges ?

12) a) Soit X une v.a. de Poisson de paramètre λ. Calculer $E\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

b) Plus généralement, soit X v.a. entière, exprimer $E\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$ en fonction de $G_X(t)$.

c) Montrer que G_X est convexe sur $[0,1]$.

(★) En déduire que$1 - \dfrac{1}{2}E(X) \leq E\left(\dfrac{1}{X+1}\right) \leq 1 - \dfrac{2}{3}E(X) + \dfrac{1}{6}E(X^2)$.

13) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n\sqrt{2} - p \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$.

Montrer qu'il existe a et b strictement positifs tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|n\sqrt{2} - p\right| \geq \dfrac{1}{an+b}$.

b) (★) Montrer qu'il existe a et b strictement positifs tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sin(n\pi\sqrt{2})\right| \geq \dfrac{1}{an+b}$.

c) Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$, où $a_n = \dfrac{1}{\sin(n\pi\sqrt{2})}$.

14) a) Justifier l'existence de $\forall x \in [0,1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \ x^{\sqrt{n}}$.

b) Montrer que $\forall x \in [0,1[$, $f(x) = \sum_{n \text{ pair}} \left(x^{\sqrt{n}} - x^{\sqrt{n+1}}\right)$.

c) (★) Montrer que $\lim_{x\to 1, x<1} f(x) = \frac{1}{2}$ lorsque x tend vers 1^-.

Indication : $\varphi_x : t \longmapsto x^{\sqrt{2t}} - x^{\sqrt{2t+1}}$ décroît. Montrer et utiliser $\int_0^{+\infty} \varphi_x = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{\sqrt{u}}\ du \to \frac{1}{2}$ quand $x \to 1$.

Autre : Poser $f(x) = \sum_{n \text{ impair}} \left(x^{\sqrt{n}} - x^{\sqrt{n+1}}\right)$. Montrer que $g(x) \leq f(x) \leq g(x) + (1-x)$.