**Probabilités. Corrigés**

◀ *Exo 1* : On considère le*s* $2^m$ parties définies par $B_I = \bigcap_{i\in J} A_i$, où $I \subset [\![1,m]\!]$.

Les $B_I$ forment une partition de l'univers (en supprimant les $B_I$ vides). La tribu engendrée par ces atomes contient tous les $A_i$ (qui sont des unions disjointes de ces atomes), d'où le résultat.

◀ *Exo 2* : On a $B = \cup_{p\in\mathbb{N}} (\cap_{n\geq p} A_n)$ est un événement. Supposons désormais que $\sum P(\overline{A_n})$ converge.

On a $P\left(\cup_{n\geq p}\left(\overline{A_n}\right)\right) \leq \sum_{n\geq p} P(\overline{A_n})$ converge vers 0 lorsque $p$ tend vers $+\infty$.

Donc $\lim_{p\to+\infty} P(\cap_{n\geq p} A_n) = 1$. Par limite croissante, $P(B) = 1$.

◀ *Exo 3* : *On* considérer un tirage de *toutes* les boules.

$(N \geq k)$ correspond au cas où les boules blanches ont été tirées durant les $(n+m-k)$ premiers tirages.

Donc $P(N\geq k) = \binom{n+m-k}{n} / \binom{n+m}{n}$.

◀ *Exo 4* : *Première solution* : On note $\Delta$ l'image de $X$ (et de $Y$).

On note que $P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y) = P(Y=x)P(X=y) = P(X=y, Y=x)$.

Donc on a $E\left(\dfrac{X}{Y}\right) = \sum_{x<y}\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right) P(X=x)P(Y=y) + \sum_{x\in\Delta} P(X=x)P(Y=x)$.

Pour $x\neq y$, on a $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} > 2$, on obtient $E\left(\dfrac{X}{Y}\right) \geq \sum_{x,y} P(X=x)P(Y=y) = 1\times 1 = 1$.

Le cas d'égalité correspond au cas où $\forall x\neq y$, $P(X=x)P(Y=y)=0$, donc au cas $X=Y$ presque sûrement.

*Seconde solution* : Comme $X$ et $Y$ indépendantes, alors $E\left(\dfrac{X}{Y}\right) = E(X)E\left(\dfrac{1}{Y}\right) = E(X)E\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

Il s'agit alors de la propriété de Jensen sur les fonctions convexes (ici $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ convexe).

Il s'agit en effet de prouver que $E\left(f(X)\right) \geq f(E(X)))$ pour $f$ convexe

On utilise $\forall x,\ f(x) \geq f(\mu) + (x-\mu)f'(\mu)$, où $\mu = E(X)$, et on passe à l'espérance.

◀ *Exo 5* : On munit l'ensemble $E$ des permutations de $[\![1,n]\!]$ de la loi uniforme.

Déterminer l'espérance et la variance du nombre $N$ de points fixes de $\sigma\in E$.

*Indication* : On écrit $N = \sum_{i=1}^n Z_i$, avec $1_{\sigma(i)=i}$. Or, $E(Z_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. Donc $E(N) = 1$.

De même, $E(Z_iZ_j) = E(1_{\sigma(i)=i,\sigma(j)=j}) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$ pour $i\neq j$.

Donc $V(Z_i) = E(Z_i) - E(Z_i)^2 = \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ et $\mathrm{Cov}(Z_i,Z_j) = E(Z_i)E(Z_j)^2 - E(Z_iZ_j) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n-1)}$.

Donc $V(N) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \sum_{i\neq j}\frac{1}{n^2(n-1)} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = 1$.

◀ *Exo 6* : $X = \sum_{i=1}^n 1_{i\in A\cup B}$, donc $X = \sum_{i=1}^n (1_{i\in A} + 1_{i\in B} - 1_{i\in A}1_{i\in B})$, donc $E(X) = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}n = \frac{3}{4}n$.

*Remarque* : Ici, les événements $(i\in A\cup B)$ sont indépendantes, donc $X$ la une loi binomiale $\mathcal{B}(n,\frac{3}{4})$.

◀ *Exo 7* : $N \leq \sum_{i=1}^n 1_{X_i\geq a} = \mathrm{card}\{i \mid X_i \geq a\}$, et on conclut par croissance et linéarité de l'espérance.

◀ *Exo 8* : On devrait avoir $G_X(t)^2 = G_{X+Y}(t) = \frac{1}{5}(1+t+...+t^4) = \frac{1}{5}\frac{t5-1}{t-1}$ scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

Mais $G_X(t)^2$ n'admet sur $\mathbb{C}$ que des racines d'ordre pair. D'où une contradiction.

*Variante* : On suppose $X$ et $Y$ de lois différentes et $X+Y$ de loi uniforme sur $\{0,1,..,5\}$.

On cherche à décomposer $G_{X+Y}(t) = \frac{1}{6}(1+t+...+t^5) = \frac{1}{6}\frac{t^6-1}{t-1}$ comme produit de deux polynômes à coefficients réels positifs. On a $\frac{t^6-1}{t-1} = (t+1)(t^2-t+1)(t^2+t+1)$.

On obtient comme seule décomposition possible : $G_{X+Y}(t) = \frac{1}{3}(1+t+t^2) \times \frac{1}{2}(1+t^3)$.

◀ *Exo 9* : a) On a pour $n \geq k$, $P(S_n = k) \geq P(X=1)^k P(X=0)^{n-k}$ associé à $(X_1,...,X_n) = (1,...,1,0,...)$.

b) Posons $a_n = P(Y=n)$. On a $P(Y \text{ pair}) = \sum_{k \text{ pair}}^{+\infty} a_k = \frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k + \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k)$.

c) On a $G_{S_n}(t) = (q+pt)^n$, donc $P(S_n \text{ pair}) = \frac{1}{2}((q+p)^n + (q-p)^n) \to \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$.

d) Posons $a_n = P(X=n)$. On a $G_{S_n}(-1) = G_X(-1)^n$, où $G_X(-1) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k$.

Comme $a_0$ et $a_1$ sont non nuls, alors $|G_X(-1)| < 1$, donc $\lim_{n\to+\infty} G_X(-1)^n = 1$.

On conclut avec $P(S_n \text{ pair}) = \frac{1}{2}(1+G_X(-1)^n) \to \frac{1}{2}$.

◀ *Exo 10* : a) $S_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,x)$. On a $E(\frac{1}{n}S_n) = x$ et $V(\frac{1}{n}S_n) = \frac{1}{n}x(1-x)$.

b) On a $\left|E\left(f\left(\frac{1}{n}S_n\right) - f(x)\right)\right| \leq E\left(\left|f\left(\frac{1}{n}S_n\right) - f(x)\right|\right) \leq kE\left(\left|\frac{1}{n}S_n - x\right|\right)$.

Par Cauchy-Schwarz, $E\left(\left|\frac{1}{n}S_n - x\right|\right) \leq \sqrt{V(\frac{1}{n}S_n)} = \sqrt{\frac{1}{n}x(x-1)} \leq \sqrt{\frac{1}{4n}}$.

Or, $Q_n(x) = E(f\left(\frac{1}{n}S_n\right))$. Donc $\sup_{x\in[0,1]} |Q_n(x) - f(x)| \leq \sqrt{\frac{1}{4n}} \to 0$ en $+\infty$.

◀ *Exo 11* : $N$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,\frac{1}{2})$. On a $E(N) = \dfrac{n}{2}$ et $V(n) = \dfrac{n}{4}$.

Donc par Bienaymé-Tchebychev, $P\left(\left|\dfrac{N}{n} - \dfrac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.

Donc $P\left(\left|\dfrac{N}{n} - \dfrac{1}{2}\right| < 0.1\right) \geq 1 - \dfrac{100}{4n}$. On choisit $n$ tel que $\dfrac{100}{4n} \leq \dfrac{1}{10}$.

◀ *Exo 12* : On a $Y = \sum_{k=1}^{X} 1_{A_k}$ et on pose $Y_n = \sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}$ qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

On a $P(Y=j) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y_n = j \mid N=n)P(N=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y_n=j)P(N=n)$ par indépendance.

Donc $P(Y=j) = \sum_{n=j}^{+\infty} \binom{n}{j} p^j q^{n-j} \dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = \dfrac{p^j\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{+\infty}\dfrac{(q\lambda)^m}{m!} = \dfrac{(p\lambda)^j}{j!}e^{-p\lambda}$ donc loi $\mathcal{P}(\lambda p)$.

◀ *Exo 13* : a) On a $A$ et $-A$ ont même loi, donc il en est de même pour $A^k$ et $(-A)^k$.

Donc $E(\operatorname{tr} A^k) = E(\operatorname{tr}(-A)^k)$, et si $k$ impair, on obtient $E(\operatorname{tr} A^k) = 0$.

On a $\operatorname{tr} A^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij}X_{ji}$, donc $E(\operatorname{tr} A^2) = n$, car $E(X_{ii}^2) = 1$ et si $i \neq j$, $E(X_{ij}X_{ji}) = E(X_{ij})E(X_{ji}) = 0$.

On a $\operatorname{tr} A^4 = \sum_{i,j,k,l} X_{ij}X_{jk}X_{kl}X_{li}$. Pour avoir $E(X_{ij}X_{jk}X_{kl}X_{li}) \neq 0$, il faut que chaque terme apparaisse un nombre impair de fois. Donc les seuls cas sont les $(i,i,i,i)$ et $(i,j,i,j)$, avec $i \neq j$.

On obtient donc $E(\operatorname{tr} A^4) = n + n(n-1) = n^2$.

b) On raisonne par récurrence à partir de $\det A = \sum_{i=1}^n X_{i1}(-1)^{i-1}\Delta_i$.

On a aussi $(\det A)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n X_{i1}X_{j1}(-1)^{i+j}\Delta_i\Delta_j$.

On a par indépendance $E(X_{i1}X_{j1}\Delta_i\Delta_j) = E(X_{i1})E(X_{j1})E(\Delta_i\Delta_j) = 0$ si $i \neq j$, et $E(\Delta_i^2)$ si $i=j$.

Donc $E(\det A) = 0$ et $V(\det A) = E((\det A)^2) = nE(\Delta^2)$, donc par récurrence $V(\det A) = n!$

◀ *Exo 14* : On note $X_1,...,X_n$ les variables aléatoires à valeurs dans $[\![1,N]\!]$ associés aux $n$ tirages.

On pose $Y = \min\{X_1,...,X_n\}$ et $Z = \max\{X_1,...,X_n\}$.

*Avec remise* : $P(Y > k) = P(X_1 > k,...,X_n > k) = (\frac{N-k}{N})^n$ par indépendance des $X_i$.

On a donc $E(Y) = \sum_{k=0}^{N} (\frac{N-k}{N})^n = \sum_{k=0}^{N} (\frac{k}{N})^n$, donc $\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} E(Y) = \frac{1}{n+1}$ par les sommes de Riemann.

Et on a $\lim_{n\to+\infty} E(Y) = 1$ (car la proba d'obtenir 1 pour au moins un tirage tend vers 1).

*Sans remise* : $P(Y > k) = P(Z_1 > k, ..., Z_n > k) = \binom{k}{n} / \binom{N}{n}$.

Donc $E(Y) = \sum_{k=0}^{N} \binom{k}{n} / \binom{N}{n}) = \binom{N+1}{n+1} / \binom{N}{n} = \frac{N+1}{n+1}$ par la formule de la crosse de hockey.

*Remarque* : Pour $E(Z)$, on peut utiliser $P(Z > k) = 1 - P(Z \leq k)$, et $(Z \leq k) = \cap_{i=1}^{n} (X_i \leq k)$.

Mais on peut aussi déduire la valeur de $E(Z)$ de la valeur de $E(Y)$.

En effet, $N + 1 - X_i$ sont indépendantes et de même loi que les $X_i$.

Donc $E(\max(N + 1 - X_i)) = E(\min(X_i))$, d'où $N + 1 - E(Z) = E(Y)$.

◀ *Exo 15* : Soit $X_\lambda$ une v.a. de loi de Poisson $P(\lambda)$. On a $S_\lambda = P(X_\lambda \geq \lceil a\lambda \rceil)$. Or, $E(X_\lambda) = \lambda$ et $V(X_\lambda)$.

On déduit de Bienaymé-Tchebychev que $P(X_\lambda \leq \lambda - \varepsilon) \leq \dfrac{1}{\lambda\varepsilon}$ et $P(X_\lambda \geq \lambda + \varepsilon) \leq \dfrac{1}{\lambda\varepsilon}$.

On en déduit que $\lim_{\lambda\to+\infty} S_\lambda = 1$ si $a < 1$ et $\lim_{\lambda\to+\infty} S_\lambda = 0$ si $a < 1$.

◀ *Exo 16* : On a $p_{n+1} = P(X_{n+1} \text{ pair }) = P(X_n \text{ pair}, Z_{n+1} = 0) + P(X_n \text{ impair}, Z_{n+1} = 1)$.

Donc $p_{n+1} = p_n(1 - a_{n+1}) + (1 - p_n)a_{n+1} = (1 - 2p_n)a_{n+1} + p_n$.

D'où $p_{n+1} - \frac{1}{2} = (p_n - \frac{1}{2})(2a_{n+1} - 1)$ et $p_0 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, donc $p_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \prod_{k=1}^{n} (1 - 2a_k)$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2}$ ssi $\prod_{n=1}^{+\infty} |1 - 2a_n| = 0$, donc ssi $\left(\exists\, n, a_n = \frac{1}{2}\right)$ ou bien $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$.