$\boxed{\textbf{Probabilités}}$

1) Lois de probabilité

Important : Dans de n tirages *sans remise*, l'espace probabilisé considéré peut-être soit le n-uplet injectif des tirages successifs, soit la partie de cardinal n des objets sélectionnés lors des tirages successifs.

Exemple : La probabilité p de tirer 1 et 2 lors de n tirages sans remise dans $[\![1, N]\!]$ vaut $\dfrac{\binom{N-2}{n-2}}{\binom{N}{n}} = \dfrac{n}{N}\dfrac{n-1}{N-1}$.

Exemple : Soit X une v.a. entière. Alors $\lim_{n\to+\infty} P(X = n) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} P(X > n) = 0$.

Exemple : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements mutuellement indépendants, avec $a_n = P(A_n) < 1$.
Alors $P(\cap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}) = \prod_{n=0}^{+\infty}(1 - a_n)$. D'où $\lim_{n\to+\infty} P(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n) = 1$ ssi $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$.

Exemple : Si X et Y ont même loi, alors $P(X < Y) = P(Y < X) = \frac{1}{2}P(X \neq Y)$.

Exemple : Soit $(B_1, ..., B_n)$ une partition d'un ensemble E en n parties non vides.
Le nombre d'éléments de la tribu engendrée par $(B_1, ..., B_n)$ est 2^n. Ce sont les $\sqcup_{J\subset[\![1,n]\!]}B_J$.

◀ *Exo 1* : (★) Soit $(A_1, ..., A_m)$ une famille de m parties d'un ensemble E.
Montrer qu'il existe une tribu de E de cardinal $\leq 2^{2^m}$ contenant tous les A_i.

Indication : Considérer les 2^m parties définies par $B_I = \bigcap_{i\in J} A_i$, où $I \subset [\![1, m]\!]$.

◀ *Exo 2* : (★) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'événements et B : " il existe un rang à partir duquel A_n est vrai ".
Montrer que B est un événément. Montrer que si $\sum P(\overline{A_n})$ converge, alors $P(B) = 1$.

◀ *Exo 3* : (★) On considère des tirages sans remise dans une urne contenant n boules blanches et m rouges.
On s'arrête une fois les boules blanches tirées. Déterminer la loi du nombre N de boules rouges restantes.

Indication : Considérer un tirage de *toutes* les boules. En déduire $P(N \geq k) = \binom{n+m-k}{n}/\binom{n+m}{n}$.

◀ *Exo 4* : Soit X et Y deux v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et i.i.d. Montrer que $E\left(\dfrac{X}{Y}\right) \geq 1$. Cas d'égalité ?

2) Fonctions caractéristiques $1_A : \Omega \to \{0, 1\}$; $1_{A\cap B} = 1_A 1_B$, $1_{\Omega\setminus A} = 1_\Omega - 1_A$.

Exemple : $|X| = (1_{|X|\geq\lambda} + 1_{|X|<\lambda})\ |X|$, donc $E(|X|) \leq \lambda P(|X| \geq \lambda) + 0 = \lambda P(|X| \geq \lambda)$, d'où Markov.

Exemple : $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = 1 - E(\prod_{i=1}^{n}(1 - 1_{A_i})) = 1 - \sum_{I\subset\{1,2,...,n\}}(-1)^{\operatorname{card} I}\ P(\cap_{i\in I}A_i)$.

Remarque : Si $a_k = P(\cap_{i\in I}A_i)$ en dépend que de $k = \operatorname{card} I$, alors on obtient $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}a_k$.

Exemple culturel : Nombre d_n de dérangements (= permutation σ sans point fixe)
On écrit que $d_n = n!\ P(\overline{A_1} \cap ... \cap \overline{A_n})$, où $A_i = P(\sigma(i) = i)$. On a $P(\cap_{i\in I}A_i) = \frac{(n-k)!}{n!}$, où $k = \operatorname{card} I$.

Variables de comptage : Il s'agit des variables s'écrivant sous la forme $\boxed{N = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}}$.

◀ *Exo 5* : On munit l'ensemble E des permutations de $[\![1, n]\!]$ de la loi uniforme.

Déterminer l'espérance et la variance du nombre N de points fixes de $\sigma \in E$.

Indication : On écrit $N = \sum_{i=1}^{n} Z_i$, où $Z_i = 1_{\sigma(i)=i}$.
On a $E(Z_i) = \frac{1}{i}$, $V(Z_i) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ et pour $i \neq j$, $\operatorname{Cov}(Z_i, Z_j) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n^2(n-1)}$.

Remarque : Ici, les variables Z_i ne sont pas indépendantes. On ne peut calculer la loi de N simplement.

◀ *Exo 6* : Soient A et B parties aléatoires indépendantes de $[\![1, n]\!]$. Calculer $E(X)$, où $X = \operatorname{card}(A \cup B)$.

Indication : $X = \sum_{i=1}^{n} 1_{i \in A \cup B}$, donc $X = \sum_{i=1}^{n} (1_{i\in A} + 1_{i \in B} - 1_{i\in A} 1_{i\in B})$, donc $E(X) = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}n = \frac{3}{4}n$.

◀ *Exo 7* : Soit $X_1, ..., X_n$ des v.a. entières, de même loi que X. Soit $a \in \mathbb{N}$.
On pose $N = \mathrm{card}\{X_i \mid X_i \geq a\}$. Montrer que $E(N) \leq nP(X \geq a)$.

Indication : Noter que $N \leq \sum_{i=1}^{n} 1_{X_i \geq a}$.

3) Valeurs aléatoires à valeurs entières

- Lorsque X est d'espérance finie, on a : $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n)$.
Alors A est d'espérance finie ssi $\sum P(X > n)$ converge, et on a $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$.

Preuve par le th de Fubini. *Variante* : $\sum_{n=0}^{N} na_n = \sum_{n=0}^{N-1} R_n - N\ R_N$. Et $N\ R_N \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} ka_k \to 0$.

- Série génératrice $G_X(z) = E(z^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, avec $a_n = P(X = n)$, définie (et continue) pour $|z| \leq 1$.
Si X et Y sont indépendantes, $G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z)$. Extension à n v.a. mutuellement indépendantes.
On a (sous réserve d'existence) $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n = G'_X(1)$ et $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.

Exemple : Soit $\alpha > 0$. Il existe une v.a. entière X telle que $\forall t \in [0, 1]$, $G_X(t) = (2 - t)^{-\alpha}$, car les coefficients du DSE sont positifs de somme 1 (valeur en $t = 1$).

On a en effet $P(X \geq \alpha + \varepsilon) \leq 2\alpha/\varepsilon^2$ car $E(X) = G'_X(1) = \alpha$ et $V(X) = \alpha(\alpha + 1) + \alpha - \alpha^2 = 2\alpha$.

◀ *Exo 8* : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi sur $\{0, 1, 2\}$.
On note $S = X + Y$. La loi de S peut-elle être la loi uniforme sur $\{0, 1, 2, 3, 4\}$?

Indication : Utiliser $G_X(t)^2 = \frac{1}{5}(1 + t + ... + t^4)$ scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

Variante : On suppose X et Y indépendantes de lois différentes respectivement sur $\{0, 1, 2\}$ et $\{0, 1, 2, 3\}$.
On note $S = X + Y$. La loi de S peut-elle être la loi uniforme sur $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$?

◀ *Exo 9* : Soit $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, avec X_i v.a. entières de même loi que X. On suppose $P(X = 0)$ et $P(X = 1) > 0$.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^{*-}$, $P(S_n = k) > 0$ pour n assez grand.

Indication : Pour $n \geq k$, comparer $P(S_n = k)$ et $P(X = 1)^k P(X = 0)^{n-k}$

b) Justifier que pour tout variable aléatoire entière Y, on a $P(Y \text{ pair}) = \frac{1}{2}(G_Y(1) + G_Y(-1))$.

Remarque : De même, $P(Y \equiv 0\ [3]) = \frac{1}{3}(G_Y(1) + G_Y(j) + G_Y(j^2))$.

c) *Cas particulier* : Montrer que $\lim_{n\to+\infty} P(S_n \text{ pair}) = \frac{1}{2}$ si X suit une loi $\mathcal{B}(p)$, avec $0 < p < 1$.

d) Dans le cas général, montrer que $\lim_{n\to+\infty} P(S_n \text{ pair}) = \frac{1}{2}$.

4) Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev, loi faible des grands nombres

- Inégalité Bienaymé-Tchebychev : $P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq V(X)/\varepsilon^2$.

- Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de v.a. i.i.d.de moment d'ordre 2 fini, on a $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} P(\left|\frac{1}{n}S_n - \mu\right| \geq \varepsilon) = 0$.
On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers la v.a. constante μ, où $\mu = E(X_n)$.

Exemple : Supposons $X_\lambda \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Alors pour tous $a < 1 < b$, $\lim_{\lambda\to+\infty} P(\lambda a \leq X_\lambda \leq \lambda b) = 1$.
Donc pour toute fonction lipschiztienne $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\lim_{\lambda\to+\infty} E(f(\frac{1}{\lambda}X_\lambda)) = f(1)$.

◀ *Exo 10* : Soit $x \in [0, 1]$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre x.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de S_n.

b) Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ k-lispchitzienne. On pose $Q_n(x) = E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)$. Caluler $E\left(\frac{S_n}{n}\right)$ et $V\left(\frac{S_n}{n}\right)$.

Montrer que $Q_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n})$ et que $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Indication : $|Q_n(x) - f(x)| = \left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right)\right| \leq kE\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right|\right) \leq kV\left(\frac{S_n}{n}\right)^{1/n}$, car $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = x$.

◀ *Exo 11* : Soit N le nombre de *pile* obtenus dans n tirages *pile-face*. Proposer n tel que $P\left(\left|\frac{N}{n} - \frac{1}{2}\right| < 0.1\right) \geq \frac{9}{10}$.

5) Sommes

- Variance d'une somme : Avec $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $V(S_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i X_j)$.

Cas des v.a. non corrélées : $V(S_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$, donc $V(S_n) = O(n)$ si les X_i ont même loi.

- Formule de Wald : $S = \sum_{i=1}^N X_i$, avec X_i et N indépendantes. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

On a $G_S(z) = G_N(G_X(z))$ et $E(S) = E(N)E(X)$. On utilise notamment la formule des probas totales :
On a $P(S = k) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(S_n = k \mid N = n)P(N = n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(S_n = k)P(N = n)$.

- Marches aléatoires : $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, avec X_i à valeurs dans $\{-1, 1\}$, par exemple Rademacher.
Lien avec la loi binomiale. La probabilité de retour en 0 vaut 1 si la marche est équilibrée.
Elle vaut 0 sinon : En effet, si $p > \frac{1}{2}$, $P(S_n = 0) = O(\lambda^n)$, où $\lambda = 4pq < 1$.
Donc $\sum P(S_n = 0)$ converge, ce qui implique a fortiori que $\lim_{n\to+\infty} \cup_{k\geq n}(S_k = 0) = 0$.

◀ *Exo 12* : Le nombre X de clients qui entrent dans une boutique suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque client achète un article avec une probabilité $p \in]0,1[$ et aucun sinon. Déterminer la loi du nombre Y d'articles achetés.

Indication : On a $Y = \sum_{k=1}^X 1_{A_k}$, où A_k : le k-ième client achète un article.

Remarque : En fait, cas particulier de Wald : $G_Y(z) = e^{\lambda(p+qz)(z-1)} = e^{\lambda p(z-1)}$.

◀ *Exo 13* : On considère une matrice aléatoire $A = (X_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$, où les X_{ij}, avec $i \leq j$, sont des v.a. indépendantes de loi de Rademacher.

a) Montrer que $E(\mathrm{tr}\, A^k) = 0$ pour tout k entier impair. Montrer que $E(\mathrm{tr}\, A^2) = n$ et $E(\mathrm{tr}\, A^4) = n^2$.

b) Montrer que $E(\det A) = 0$ et $V(\det A) = n!$

6) Extremas

$Y = \max(X_1, ..., X_n)$ et $Z = \min(X_1, ..., X_n)$. Alors on a $(Z > k)$ ssi $\forall i$, $(X_i > k)$.

Si les X_i sont i.i.d. entières, $E(Z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (R_k)^n$ où $R_k = P(X > k)$ et $E(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} (1 - (1 - R_k)^n)$,

Remarque culturelle : Notons $X'_1 \leq ... \leq X'_n$ les valeurs des X_k rangés par ordre croissant. Puisque les X_k sont i.i.d. de même loi que X, alors $P(X_{k-1} < X < X_k)$ ne dépend pas de k.

◀ *Exo 14* : On considère n tirages dans une urne de N boules numérotées de 1 à N.
On note Y la valeur minimale des tirages obtenus. Calculer $E(Y)$ pour des tirages avec remise (resp. sans remise).
Déterminer $\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}E(Y)$ et $\lim_{n\to+\infty} E(Y)$. Interpréter les résultats.

Indications : Avec remise : $E(Y) = \sum_{k=0}^N (\frac{N-k}{N})^n \sim \frac{N}{n+1}$ lorsque $N \to +\infty$, et $\to 1$ lorsque $n \to +\infty$.
Sans remise : $E(Y) = \sum_{k=0}^N \binom{N-k}{n} / \binom{N}{n} = \sum_{k=0}^N \binom{k}{n} / \binom{N}{n} = \binom{N+1}{n+1} / \binom{N}{n}$ formule de la crosse de hockey.

7) Lois usuelles

- Loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$; on a $G_X(z) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z^k = \dfrac{z}{n}\dfrac{z^n-1}{z-1}$.

- Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ = loi du premier succès (à valeurs dans $\mathbb{N}^*$) ou du nombre N d'échecs avant succès ($\mathbb{N}$).

On a $P(M=k) = q^{k-1}p$ et $P(M>k) = q^k$, d'où $E(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{p}$. On a $N = M-1$, donc $E(N) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}$.

- Loi binomiale négative = loi du m-ième premier succès : somme S de m v.a. géométrique.

On a $\forall k \geq m$, $P(S=k) = \binom{k-1}{k-m} q^{k-m}p^k$. *Remarque* : On a $G_S(z) = \left(\frac{pz}{1-qz}\right)^m$.-

- Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$: λ représente souvent un flux moyen par unité de temps ou d'espace.

Si $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $X = \sum_{i=1}^{N} Z_i$ avec $Z_i \sim \mathcal{B}(p)$.

Remarque : La loi de X sachant $N=n$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

- Th des événements rares : Si $p_n \sim \dfrac{\lambda}{n}$, la loi $\mathcal{B}(n,p_n)$ converge vers $\mathcal{P}(\lambda)$. On parle de convergence en loi.

- *Exemple culturel* : Soit Z_k v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

$X_n = \sum_{k=0}^{n-1} Z_k$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,\frac{1}{2})$ et $Y_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k Z_k$ suit la loi loi uniforme sur $[\![0, 2^n-1]\!]$.

Pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, on a alors $\lim_{n\to+\infty} E(f(X_n)) = f(\frac{1}{2})$ et $\lim_{n\to+\infty} E(f(Y_n)) \to \int_0^1 f(t)\, dt$.

◀ *Exo 15* : Pour $0 \leq a < 1$ et pour $a > 1$, déterminer $\lim_{\lambda\to+\infty} S_\lambda$, où $S_\lambda = e^{-\lambda}\sum_{k=\lceil a\lambda\rceil}^{+\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!}$.

8) Etudes à un pas

a) *Exemple*

◀ *Exo 16* : Soit $X_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$, où les Z_k sont indépendantes de lois $\mathcal{B}(a_k)$. On pose $p_n = P(X_n \text{ pair })$.

Montrer que $p_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}(1-2a_k)$. En déduire une CNS pour que $\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2}$.

b) *Exemple* : *Chaîne de Markov* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\{0,1\}$ de matrice de transition $A = \begin{pmatrix} \overline{p} & q \\ p & \overline{q} \end{pmatrix}$.

Avec $\begin{cases} a_n = P(X_n=0) \\ b_n = P(X_n=1) \end{cases}$, on a $\begin{cases} a_{n+1} = \overline{p}a_n + qb_n \\ b_{n+1} = pa_n + \overline{q}b_n \end{cases}$. On calcule A^n pour calculer (a_n, b_n).

Remarque : Les valeurs propres de A sont 1 et $1 - \operatorname{tr} A = p + q - 1 \in [-1,1]$.

c) *Premier doublet de succès* (1,1)

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. i.i.d. de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

On veut calculer la série génératrice et l'espérance de $N = \inf\{n \geq 1 \mid X_n = X_{n+1} = 1\}$.

Remarque culturelle : On a affaire ici à une chaîne de Markov de v.a. $Y_n = (X_{n-1}, X_n)$.

Solution : Avec $a_n = P(N=n)$, $b_n = P(N=n \mid X_0 = 0)$ et $c_n = P(N=n \mid X_0=1)$, on a :

$a_n = qb_n + pc_n$ et $b_1 = b_2 = 0$ et $\forall n \geq 3$, $b_n = a_{n-1}$ et $c_1 = 0$, $c_2 = p$ et $\forall n \geq 3$, $c_n = qa_{n-2}$.

D'où $a_0 = a_1 = 0$, $a_2 = p^2$ et $\forall n \geq 3$, $a_n = qa_{n-1} + pqa_{n-2}$ (suite de type Fibonacci).

Donc $G_N(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = p^2t^2 + \sum_{n=3}^{+\infty}(qa_{n-1} + pqa_{n-2})t^n = p^2t^2 + (qt + pqt^2)G_N(t)$.

Donc $G_N(t) = \dfrac{p^2t^2}{1-qt-pqt^2}$. Et $E(N) = G'_N(1) = 2 + p^2\dfrac{q+2pq}{(1-q-pq)^2} = 2 + \dfrac{q+2p}{p^2} = \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p}$.

d) *Remarque* : *Premier doublet* (1,0)

On lance indéfiniment une pièce donnant *Pile* avec la probabilité $p \in]0,1[$.

On pose $M = \inf\{n \geq 2 \mid X_{n-1} = 1 \text{ et } X_n = 0\}$, avec les mêmes notations qu'au c).

La loi de M est en fait la loi du deuxième succès : On écrit M comme la somme de deux lois géométriques de paramètres respectifs p et q. Donc $G_M(t) = \dfrac{pt}{1-qt}\dfrac{qt}{1-pt}$. Et $E(M) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$.

e) *Probabilité du succès ou de ruine*

On considère un jeu à n jetons entre deux joueurs A et B. Un jeton est échangé à chaque étape : le joueur A perd un jeton avec une probabilité p et gagne un jeton avec une probabilité $q = 1 - p$.

Le jeu s'arrête lorsqu'un joueur a gagné tous les jetons. On note a_k la probabilité que A gagne en partant de k jetons.

Montrer que $a_0 = 0$, $a_n = 1$ et $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $a_k = pa_{k-1} + qa_{k+1}$. En déduire a_k.

On note $c_n = P(N > n)$. Alors $c_{n+2} = qP(N > n+2 \mid X_1 = 0) + pP(N > n+2 \mid X_1 = 1)$.

On a $P(N > n+2 \mid X_1 = 0) = P(N > n+1) = c_{n+1}$

Et $P(N > n+2 \mid X_1 = 1) = qP(N > n+2 \mid X_1 = 1, X_2 = 0) + 0 = qc_n$.

On en déduit $c_{n+2} = c_{n+1}q + qpc_n$ et $c_0 = c_1 = 1$.

Donc $a = E(N) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ vérifie $a = 2 + q(a-1) + qpa$, donc $a = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$.