Analyse

Inégalités

- Inégalités usuelles : Taylor-Lagrange (et accroissements finis), Cauchy-Schwarz, convexité.

- Utilisations de DL pour la recherche d'équivalents (et de limites).

Exemple : $\lim_{n\to+\infty}\left(2\cos\left(\frac{n+1}{3n}\pi\right)\right)^n$ est de la forme $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\lambda}{n}+\mathfrak{o}\left(\frac{\lambda}{n}\right)\right)^n) = e^{\lambda}$.

Exemple : Soit f de classe C^2 avec $f(0)=0$, $f'(0)=1$. On a $\forall x\in[0,1]$, $|f(x)-x|\le Mx^2$, où $M=\frac{1}{2}\sup_{[0,1]}|f''|$.

- *Exemple* : Par le DSE de cos et l'encadrement des séries alternées, on a $\frac{1}{2}\le\cos 1\le\frac{1}{2}+\frac{1}{24}$.

- Inégalités locales via un DL : Si f est C^2 et $f(0)=f'(0)=0$, alors $f(x)=O(x^2)$.

- Intégration des inégalités. Comparaisons sommes-intégrales.

Exemple : $S_n=\sum_{k=n+1}^{pn}\frac{1}{k}=\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{pn}\frac{1}{k/n}\to_{n\to+\infty}\int_1^p\frac{1}{t}\,dt=\ln p$ (Sommes de Riemann).

Variante : $\int_n^{pn}\frac{1}{t}\,dt\le S_n\le\int_{n+1}^{pn-1}\frac{1}{t}\,dt$ en utilisant $t\longmapsto\frac{1}{t}$ décroissante (comparaison sommes/intégrales).

Exemple : $\lim_{x\to 0}\int_x^{2x}\frac{1}{\ln(1+t)}\,dt=\ln 2$: on compare $\int_x^{2x}\frac{1}{\ln(1+t)}\,dt$ avec $\int_x^{2x}\frac{1}{t}\,dt=\ln 2$.

- Existence de limites d'une suite : Pincement, pincement avec ε (si on connaît la limite) ;
théorème de la limite monotone, étude de la série associée (si on ne connaît pas la limite).

- Preuves de type Cesàro : on coupe les sommes (ou intégrales) et on utilise le pincement avec ε.

Exemple : Si $\lim_{n\to+\infty}u_n=L$, alors $\lim_{n\to+\infty}2^{-n}(\sum_{k=0}^n 2^k u_k)=2L$. On traite d'abord le cas $L=0$.

Exemple : Si $\lim_{n\to+\infty}u_n=L$, alors $\lim_{n\to+\infty}2^{-n}\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}u_k=L$. On traite d'abord le cas $L=0$.

Exemple : Si $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=L$, alors $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=L$.

◀ *Exo 1 : Evaluations d'intégrales par des intégrations par parties*

a) Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer que $\int_0^1 f(t)\,t^n\,dt=\frac{f(1)}{n+1}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{f(1)}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

b) Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ de classe C^2. Montrer que $\int_0^1\cos(n\pi t)f(t)\,dt=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

c) Déterminer un équivalent de $f(x)=\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt$ lorsque x tend vers 0^+ et lorsque $x\to+\infty$.

Indication : c) Par IPP, $\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt=\frac{e^{-x}}{x}-\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}\,dt$.
On a $0\le\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}\,dt\le\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{xt}\,dt=\mathfrak{o}_{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\right)$. Donc $f(x)\sim_{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}$.

◀ *Exo 2* : Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n}\tan\left(\frac{1}{k}\right)=\ln 2$.

Indication : On ne sait pas calculer simplement $\int\tan\left(\frac{1}{t}\right)\,dt$. Donc on va comparer $\tan(\theta)$ et θ.
Par l'inégalité de Taylor-Lagrange, $\forall\theta\in[0,1]$, $|\tan\theta-\theta|\le\frac{1}{2}(2\theta^2)=\theta^2)$.
Donc $\left|\sum_{k=n}^{2n}\tan\left(\frac{1}{k}\right)-\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}\right|\le\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^2}\le\frac{n+1}{n^2}\to 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n}\tan\left(\frac{1}{k}\right)=\ln 2$.

◀ *Exo 3* : On suppose $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^2. Montrer que si f et f'' sont bornées, alors f' est bornée.

Indication : On a $|f(x+h)-f(x)-hf'(x)| \leq \frac{1}{2}h^2 \sup|f''|$, donc $\forall h>0$, $|f'(x)| \leq \dfrac{2\sup|f|}{h} + \dfrac{1}{2}h\sup|f''|$.
Ainsi, f' est bornée. On peut même choisir $h>0$ minimisant le majorant.

Suites récurrentes $u_{n+1}=f(u_n)$

- On cherche des intervalles stables où $f-\mathrm{Id}$ est de signe constant : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors monotone.

- Utilisation de Cesàro dans les suites récurrentes $u_{n+1}=f(u_n)$ à convergence lente ($f(0)=0$ et $f'(0)=1$).

- Si f est croissante, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

- Convergence exponentielle : si $f(0)=0$ et $|f(x)| \leq k\,|x|$, où $0\leq k<1$, alors $u_n = O(k^n)$.

◄ *Exo 4* : *Convergence lente et Cesàro.* On suppose $x_{n+1}=f(x_n)$, avec $x_0 \in]0,1]$.

On suppose $f(0)=0$ et $0<f(x)<x$ pour $x\in]0,1]$ et $f(x)=x-\lambda x^2 + \mathfrak{o}\left(x^2\right)$, avec $\lambda>0$.
Alors $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0^+$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x_{n+1}}-\dfrac{1}{x_n}\right)=\lambda$, donc $x_n \sim \dfrac{1}{n\lambda}$.

◄ *Exo 5* : On considère $u_0=1$ et $u_{n+1}=\sqrt{u_n+\dfrac{1}{n+1}}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
Indication : On a d'abord $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\geq 1$.
Il reste à prouver que $\forall \varepsilon'>0$, $u_n \leq 1+\varepsilon'$ pour n assez grand.
Soit $\varepsilon>0$. Pour $n\geq p$ assez grand, $\frac{1}{n+1}\leq \varepsilon$,, donc on a $\forall n\geq p$, $u_{n+1}\leq\sqrt{u_n+\varepsilon}$.
Donc $\forall n\geq p$, $u_n\leq v_n$ où $(v_n)_{n\geq p}$ définie par $v_p=u_p$ et $v_{n+1}=\sqrt{v_n+\varepsilon}$.
On vérifie (en étudiant $f : x\longmapsto \sqrt{x+\varepsilon}$) que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le pt fixe $\lambda(\varepsilon)$ de $f : x\longmapsto\sqrt{x+\varepsilon}$.
Donc $u_n\leq v_n\leq \lambda(\varepsilon)+\varepsilon$ pour n assez grand. Or, $\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda(\varepsilon)=1$. D'où $\lambda(\varepsilon)+\varepsilon$ arbitrairement proche de 1.

Suites définies implicitement par $f_n(x_n)=0$

- Utilisation du th de la bijection pour l'existence et l'unicité ; utilisation du TVI pour localiser x_n.

Pour prouver $\lim_{n\to+\infty} x_n=\lambda^+$, on prouve que pour $\varepsilon>0$, $f_n(\lambda)f_n(\lambda+\varepsilon)<0$ pour n assez grand.
Pour prouver $\lim_{n\to+\infty} x_n=+\infty$, on prouve que pour tout a, $f_n(a)\left(\lim_{+\infty} f_n\right)<0$ pour n assez grand.

- Méthodes par approximations successives.

Exemple : L'équation $x+\ln x=n$ admet une unique solution $x_n>1$ pour tout $n\geq 1$.
On a $\lim_{n\to+\infty} x_n=+\infty$, donc $x_n\sim(x_n+\ln x_n)=n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

◄ *Exo 6* : a) Montrer que l'équation $x^n-1-x=0$ admet une unique solution $x_n\geq 1$.
b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} x_n=1$, puis $x_n=1+\dfrac{\ln 2}{n}+\mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
Indication : On montre que $1\leq x_n\leq 1+\varepsilon$ pour n assez grand, avec $f_n(1)<0$ et $f_n(1+\varepsilon)\to+\infty$.
On obtient le DA en posant $x_n=1+\varepsilon_n$ et en cherchant un équivalent de ε_n.

Topologie dans $\mathbb{R}$

- Théorème des valeurs intermédiaires (et localisation des zéros). Théorème de Rolle.
Formule de la moyenne : Si $g\geq 0$, alors il existe $c\in[a,b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)\ dt = f(c)\int_a^b g(t)\ dt$.
Exemple : Si $f>0$ et continue sur $[a,b]$ et $\theta\in[0,1]$, il existe un unique x tel que $\int_a^x f(t)\ dt=\theta\int_a^b f(t)\ dt$.

- Théorème de Weierstrass (les extremas sont atteints sur un segment (sur un compact).

Exemple : Toute fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ni majorée ni minorée admet une infinité de zéros.

- Partie dense dans $\mathbb{R}$: Si $\inf(A \cap \mathbb{R}_+^*) = 0$ et si $(\forall a \in A, \forall n \in \mathbb{Z}, na \in A)$, alors A est dense dans $\mathbb{R}$.

En effet, pour $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, on approche x par un multiple de a, où $a \in A$ vérifie $0 < a \leq \varepsilon$.

◀ *Exo 7* : Montrer que $A = \{\sqrt{n} - \sqrt{m}, (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Indication : A est stable par $a \longmapsto na$, et on a $\inf(A \cap \mathbb{R}_+^*) = 0$, car $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$.

◀ *Exo 8* : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall(x,y)$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Montrer que f est convexe.

Indication : On pose $\Delta_p = \left\{\frac{k}{2^p}, k \in [\![0, 2^p]\!]\right\}$ et $\Delta = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \Delta_p$.

On vérifie par récurrence sur p que $\forall \lambda \in \Delta_p$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

De plus, Δ est dense dans $[0,1]$: pour tout $\lambda \in [0,1]$, $\lambda = \lim_{p\to+\infty} \frac{\lfloor 2^p \lambda \rfloor}{2^p}$, et $\frac{\lfloor 2^p \lambda \rfloor}{2^p} \in \Delta_p$.

Par continuité de f, on en déduit $\forall \lambda \in [0,1]$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

Relations fonctionnelles

- *Exemple important* : Les fonctions continues vérifiant $f(x+y) = f(x) + f(y)$ sont les fonctions $x \longmapsto ax$.

On prouve d'abord qu'on a nécessairement $f(ar) = rf(1)$ pour tout rationnel r.

Remarque : Lorsque f est C^1, la relation équivaut à $f(0) = 0$ et $f'(x+y) = f'(x)$, c'est-à-dire f' constante.

Exemple : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et vérifie $f(x+y) = f(x)f(y)$, alors $f = 0$ ou $f(x) = \exp(ax)$,

En effet, on a $f \geq 0$ car $f(x) = f(\frac{1}{2}x)^2 \geq 0$. Si $f > 0$, on pose $g(x) = \ln f(x)$.

Sinon, il existe x tel que $f(x) = 0$, et on a alors $\forall y$, $f(x+y) = 0$, donc f est nulle.

Exemple : Si f continue vérifie $f(2x) = f(x)$, alors f est constante. En effet, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(2^{-n}x) = f(0)$.

◀ *Exo 9* : Déterminer les fonctions f dérivable en 0 vérifiant $f(2x) = 2f(x) + 1$.

Indication : Avec $g(x) = f(x) + 1$, on se ramène à $g(2x) = 2g(x)$.

On a alors $g(x) = 2^n g(2^{-n}x) \to xg'(0) = f'(0)$, donc $g(x) = ax$, avec $a = f'(0)$.

Réciproquement, les $f(x) = ax - 1$ sont solutions évidentes.

Séries, intégrales

- Théorème de comparaisons pour les séries et intégrales à termes positifs.

- Séries et intégrales absolument convergentes. Th de Fubini pour les séries convergeant absolument.

- Séries alternées (critère spécial et majoration du reste). *Contre-exemple* : $\sum \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)$ diverge.

- Utilisation d'un DL : $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ diverge car $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \varepsilon_n$, avec $\varepsilon_n \sim \frac{1}{2n}$.

- Application des séries pour prouver la convergence d'une suite : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

- Séries et intégrales semi-convergentes ; IPP (et transformation d'Abel pour les séries) :

Exemple : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\, dt$ (preuve en passant par IPP sur $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$).

Exemple : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\exp(in\theta)}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n(\theta)}{n(n+1)}$, où $A_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$ bornée pour $\theta \neq 0$ $[2\pi]$.

- Étude d'une intégrale par une série : $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\ dt = +\infty$ et $\int_0^1 \frac{1}{1+\lfloor 1/t \rfloor}\ dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

- Critère de D'alembert : Si $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L < 1$, alors $\sum u_n$ converge (cv infra-géométrique).

- Sommation des relations de comparaisons (hors-programme officiel) :

Culturel : Si $f(x) \sim_{+\infty} g(x)$ et $g \geq 0$ intégrable, alors $\int_x^{+\infty} f(t)\ dt \sim \int_x^{+\infty} g(t)\ dt$ lorsque x tend vers $+\infty$.

◀ *Exo 10* : Montrer que la série $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ converge.

Indication : $\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{(-1)^n\pi}{2n} + \varepsilon_n$, avec $\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

◀ *Exo 11* :

a) On suppose $u_n > 0$ et $\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$. Montrer qu'il existe λ tel que $u_n \sim \lambda n^\alpha$.

Remarque : On en déduit que $\sum u_n$ converge ssi $\alpha < -1$ (*critère de Raabe-Duhamel*).

b) Soit $\alpha > 0$. Montrer qu'il existe λ tel que $\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1) \sim \lambda\ n^{\alpha-1}\ n!$

◀ *Exo 12* : ($\bigstar$) On pose $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{u_{n-1}}{n^\alpha}$, où $\alpha > 0$. Montrer : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $\alpha > 1$.

Indication : On a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = L > 0$, alors $u_{n+1} - u_n \sim \frac{L}{n^\alpha}$, donc $\alpha > 1$.

Réciproquement, si $\alpha \leq 1$, on a $u_{n+1} \leq u_n\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ car $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) = +\infty$.

Espaces vectoriels normés

- Normes, normes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et notamment norme subordonnée à une norme de $\mathbb{R}^n$.

- Normes équivalentes, équivalence des normes en dim finie (et caractérisation de la limite par cv des coordonnées).

- Parties convexes, parties fermés, distance à un compact non vide.

Exemple : Sur $C^1([0,1],\mathbb{R})$, les normes $\|f\|_\infty$ et $N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\ dt$ ne sont pas équivalentes.
En effet, avec $f_n(t) = \sin(nt)$, on a $\lim_{n\to+\infty} N(f_n)/\|f_n\|_\infty = +\infty$.

◀ *Exo 13* : *Une norme sur* $\mathbb{R}^2$. On pose $N(x,y) = \max(|x+y|, |2x-y|)$. Représenter la boule unité.

Indication : La boule unité est le parallèlogramme délimité par les droites $x+y = \pm 1$ et $2x - y = \pm 1$.

◀ *Exo 14* : ($\bigstar$) On pose $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A) = \sup_{U\in O_n(\mathbb{R})} |\mathrm{tr}(AU)|$. Montrer que N est une norme.

Indication : $N(A)$ existe car $U \longmapsto |\mathrm{tr}(AU)|$ est continue et que $O_n(\mathbb{R})$ est bornée. Le sup est atteint.
La seule propriété délicate à prouver est $N(A) = 0 \Rightarrow A = O_n$.
On montre d'abord que $\mathrm{Vect}(O_n(\mathbb{R})) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On en déduit que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AM) = 0$.
En prenant $M = A^T$ (on bien en notant que A est orthogonal à toute matrice), on obtient $A = O_n$.

Suites et séries de fonctions

- Convergence uniforme, convergence normale. Continuité et dérivabilité.

- Limite d'intégrales, intégration terme à terme d'une série de fonctions.

Exemple : $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$, mais ne converge pas normalement sur $]0,+\infty[$.

Exemple : $\sum x^n(1-x)^\alpha$ converge normalement sur tout segment $[0,a]$, avec $a < 1$.

La série $\sum x^n(1-x)^\alpha$ converge normalement sur $[0,1[$ ssi $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, c'est-à-dire ssi $\alpha > 1$.

Exemple : Toute fonction continue sur un segment est limite uniforme de fonctions en escaliers.

◀ *Exo 15* : Soit $a \in \mathbb{C}$ et $|a| \neq r > 0$. Calculer $J = \int_0^{2\pi} \dfrac{d\theta}{(a - re^{i\theta})}$.

Indications : Si $r < |a|$, avec $\lambda = \dfrac{r}{|a|} < 1$, on a $\dfrac{1}{a - re^{i\theta}} = \dfrac{1}{a} \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n e^{in\theta}$, d'où $J = \dfrac{2\pi}{a}$.

Si $r > |a|$, avec $\mu = \dfrac{|a|}{r} < 1$, on a $\dfrac{1}{a - re^{i\theta}} = \dfrac{1}{r} \dfrac{e^{-i\theta}}{1 - \mu e^{-i\theta}} = \dfrac{-1}{r} \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^n e^{-in\theta}$, d'où $J = 0$.

Variante : Calcul de $\int_0^{2\pi} \dfrac{d\theta}{(a - re^{i\theta})(b - re^{i\theta})}$. On décompose d'abord en éléments simples.

◀ *Exo 16* : Soit $0 \leq a < 1$.

Montrer que $f : x \longmapsto \prod_{n=0}^{+\infty} (1 - a^n x)$ est l'unique fonction continue vérifiant $f(0) = 1$ et $f(x) = (1 - x) f(ax)$.

Indication : On vérifie par convergence normale sur $[-\rho, \rho]$ que f est définie et continue.
Réciproquement, si $f(0) = 1$ et $g(x) = (1 - x) g(ax)$, alors $g(x) = g(a^N x) \prod_{n=0}^{N-1} (1 - a^n x) \to_{N \to +\infty} f(x)$.

◀ *Exo 17* : ($\bigstar$) On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[0, 1]$. On suppose $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n'| \leq 1$.

Montrer que la convergence est uniforme sur $[0, 1]$.

Indication : Il faut noter que la convergence simple sur tout ensemble fini est uniforme.
On prend $\Delta = \{\frac{k}{N}, 0 \leq k \leq N\}$. Comme les f_n sont 1-lipschitziennes, il en est de même de f.
On a ainsi $\forall x, \exists\, k \in [\![0, N]\!], \left|f(x) - f(\frac{k}{N})\right| \leq \frac{1}{N}$, et de même pour chaque f_n.
D'où $\sup_{[0,1]} |f_n - f| \leq \frac{2}{N} + \sup_\Delta |f_n - f|$.
Soit $\varepsilon > 0$. On choisit N tel que $\frac{2}{N} \leq \varepsilon$. D'où $\sup_{[0,1]} |f_n - f| \leq \varepsilon + \varepsilon$ pour n assez grand.

Recherche d'équivalents dans les suites d'intégrales ou les intégrales à paramètre

- Théorème de convergence dominée, th d'intégration terme à terme d'une série de fonctions

- Méthode de Laplace : il s'agit (par exemple) d'évaluer $I_n = \int_I f(t)^n \ g(t) \ dt$ où $0 \leq f(t) \leq 1$.

Pour obtenir un équivalent, on utilise un changement de variable pour se ramener à une suite d'intégrales convergeant vers une limite finie non nulle (par convergence dominée).

Exemple : $I_n = \int_0^1 \left(\dfrac{1}{1 + t^2}\right)^n dt = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(\dfrac{1}{1 + u^2/n}\right)^n dt \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}} G$, où $G = \int_0^{+\infty} \exp(-u^2) \ du$.

Exemple : *Transformée de Laplace* : $L(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) \ dt$, avec $f : [0, +\infty[\to]0, +\infty[$ continue et bornée.
Avec $u = tx$: Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lambda \neq 0$, alors $f(x) \sim \dfrac{\lambda}{x}$ en $x = 0^+$. Si $f(0) \neq 0$, alors $L(x) \sim_{+\infty} \dfrac{f(0)}{x}$.

Exemple : *Moments* : $I_n = \int_0^1 t^n f(t) \ dt$, avec f bornée continue. Alors, avec $u = t^n$, $I_n \sim \dfrac{f(1)}{n}$.

Ainsi, $I_n = \int_0^1 \dfrac{t^n}{1 + t + t^2} \ dt \sim \dfrac{1}{3n}$. On utilise le changement de variable $t = u^{1/n}$, ou bien $t = 1 - \dfrac{u}{n}$.

◀ *Exo 18* : a) Déterminer un équivalent de $I_n = \int_0^1 \dfrac{1}{(1 + x + x^2)^n} \ dx$.

Indication : Utiliser le changement de variable $t = \dfrac{u}{n}$, avec $u \in [0, n]$.

b) On pose $a_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{(1 + t^3)^n}$. Montrer que $a_n \sim \dfrac{\lambda}{n^{1/3}}$ avec $\lambda = \Gamma\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

Indication : Utiliser le changement de variable $t = \dfrac{u}{n^{1/3}}$, avec $u \in [0, n^{1/3}]$.

Remarque : Par une IPP, $a_{n+1} = \dfrac{3n-1}{3n} a_n$. Donc $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \dfrac{1}{3n} + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. D'où $a_n \sim \dfrac{\alpha}{n^{1/3}}$.

c) On pose $J_n = \int_0^1 \dfrac{t^n}{\sqrt{1-t}}\, dt$. Montrer que $J_n \sim \dfrac{\lambda}{\sqrt{n}}$, avec $\lambda = \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Indication : Utiliser le changement de variable $t = 1 - \dfrac{u}{n}$, avec $u \in [0, n]$.

◀ *Exo 19* : (★) On considère $f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \arctan(t)\, dt$.

Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Indication : Utiliser d'abord une IPP pour se ramener à $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\omega(t)\, dt$, avec $\omega(0) = 1$. Puis $u = xt$.

Recherche d'équivalents dans les séries de fonctions

Deux méthodes principales :

- Comparaisons avec une intégrale.

- Théorème de la double limite (interversion des limites).

Parfois aussi : majoration directe du reste par CSSA ou l'inégalité (ou formule) de Taylor-Lagrange.

◀ *Exo 20* : On considère $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}\ x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n + n^2 x}$.

a) Montrer que f est bien définie et continue.

b) Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+ et quand x tend vers $+\infty$.

◀ *Exo 21* : Déterminer un équivalent de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ en $+\infty$.

Indication : Utiliser $\forall x > 0,\ f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(x+2k)(x+2k+1)}$.

◀ *Exo 22* : On considère $f : [0, 1[\to \mathbb{R}\ x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n}$.

a) Montrer que f est bien définie et continue. *Indication* : Convergence normale sur $[0, a]$, pour tout $a < 1$.

b) Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 1^-. *Indication* : Utiliser $\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-u}\, du}{1+e^{-u}} = \dfrac{\pi^2}{12}$.

◀ *Exo 23* : (★) Montrer que $\sum \dfrac{e^{inx}}{n}$ converge uniformément sur tout $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, où $0 < \varepsilon < 2\pi$.

La convergence est-elle uniforme sur $]0, 2\pi[$?

Indication : Par une transformée D'Abel, se ramener à $\sum \dfrac{A_n(\theta)}{n(n+1)}$, où A_n bornée sur $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$.

◀ *Exo 24* : (★) Montrer que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et non dérivable en 0.

Indication : Pour $u \in [0, 1]$, $\sin(u) \geq \lambda u$, avec $\lambda = \cos 1 > 0$,

Donc $\dfrac{f(x)}{x} \geq \sum_{n=1}^{\lfloor 1/x \rfloor} \dfrac{\lambda n}{n^2} - \sum_{n > \lfloor 1/x \rfloor} \dfrac{1}{n^2} \sim \lambda \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) \to +\infty$ si $x \to 0^+$. Donc f non dérivable en 0.

Séries entières

- Rayon de convergence : On a $R = \sup\{\rho \geq 0 \mid (a_n \rho^n) \text{ bornée}\}$.

Si $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument ; si $|z| > R$, la série diverge.

Remarque : Si $\sum |a_n z_0^n|$ converge, $R \geq |z_0|$, si elle diverge, $R \leq |z_0|$.

Exemple : Si $\sum a_n x^n$ est de rayon R, la série $\sum a_n^2 x^n$ est de rayon R^2 et $\sum a_n x^{2n}$ est de rayon $\sqrt{R}$.

- Rayon de convergence des dérivées ; cv normale sur tout disque de rayon $\rho < R$.

- Théorèmes de comparaison : si $a_n = O(B_n)$ alors $R_a \geq R_b$; Critère de d'Alembert.

- DSE et ITT : Exemple : $\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\, du = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}u^{n-1}}{n} du = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}$.

- DSE (en 0) et équations différentielles : raisonner par analyse-synthèse ($R > 0$).

- Si $R > 0$, alors $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$; Formules de Cauchy : $a_n = \dfrac{1}{2\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta})\, e^{-in\theta}\, d\theta$.

Deux séries entières qui coïncident au voisinage de 0 sont égales (mêmes dérivées en 0).

- DSE des fonctions (notamment DSE des fonctions usuelles). $-\ln(1-x)$; $(1+x)^\alpha$ et $(1+x)^\alpha$, $\exp(\lambda z)$, arctan.

En particulier, $\left(\frac{1}{1-x}\right)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, avec $c_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{n!}$.

◀ *Exo 25* : a) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.

On note R et R' les rayons de convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{a_n} x^n$. Comparer R et R'.

b) On suppose que le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$ vérifie $0 < R < +\infty$.

Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^{(n^2)}$.

Indication : Soit $\rho > 0$. Si $|z| < 1$, on a $z^{(n^2)} = \mathfrak{o}(\rho^n)$. Si $|z| > 1$, on a $\rho^n = \mathfrak{o}(z^{(n^2)})$.

◀ *Exo 26* : a) Montrer que le nombre d_n de dérangements (permutations sans point fixe) vérifie $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k = n!$

b) En utilisant $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{d_n}{n!} x^n$ de rayon ≥ 1, en déduire $f(x)e^x = \dfrac{1}{1-x}$, d'où $f(x) = \dfrac{1}{1-x} e^{-x}$.

Remarque : On conclut $d_n = n! \sum_{k=0}^n \dfrac{(-1)^k}{k!}$. On obtient donc $d_n \sim \dfrac{n!}{e}$.

◀ *Exo 27* : $f(x) = \sqrt{1+x-x^2}$ est DSE en 0.

Indication : Utiliser $(1+x-x^2)y'(x) = \frac{1}{2}(1-2x)y(x)$. Or, en cherchant une solution $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ DSE de rayon $R > 0$, on obtient récurrence d'ordre 2 : il reste à trouver une majoration $|a_n| \leq \alpha\lambda^n$ pour valider $R > 0$.

◀ *Exo 28* : *Transformation d'Abel dans le cas des séries entières.*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle décroissante telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$. Donner de rayon R de $\sum a_n z^n$.

En considérant $\sum (a_n - a_{n+1}) z^{n+1}$, montrer que $\sum a_n z^n$ converge ssi $|z| \leq 1$ et $z \neq 1$.

Solution : Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$, alors $R \leq 1$. Comme $a_n = O(1)$, alors $R \geq 1$. Donc $R = 1$.

Ainsi, $\sum a_n z^n$ converge ssi $|z| < 1$ et diverge si $|z| > 1$. On a aussi $\sum a_n$ diverge.

D'autre part, on a $\sum_{n=0}^N (a_n - a_{n+1}) z^n = (z-1)\left(\sum_{n=0}^N a_n z^n\right) - a_{N+1} z^{N+1} + a_0$.

Pour $|z| = 1$, $\sum_{n=0}^N (a_n - a_{n+1}) z^n$ cv absolument, car $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n - a_{n+1}| = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_0$.

Si $|z| = 1$ et $z \neq 1$, alors $(z-1) \neq 0$, et on en déduit donc que $\sum a_n z^n$ converge.

◀ *Exo 29* : On considère $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \geq 2$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Déterminer le rayon de convergence R de $\sum u_n z^n$, et exprimer $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ par une fraction rationnelle.

Indication : On a $u_n = \alpha\varphi^n + \beta\psi^n \sim \alpha\varphi^n$ (cf suite de Fibonacci, et ici $\alpha > 0$). Donc $R = 1/\varphi > 0$.

Pour $|z| < R$, $F(z) = (u_0 + u_1 z) + \sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} + u_n) z^{n+2} = (u_0 + u_1 z) + z(F(z) - u_0) + z^2 F(z)$.

◀ *Exo 30* : Montrer que $\dfrac{x}{e^x - 1}$ est DSE et que les coefficients du DSE sont des nombres rationnels.

Indication : On cherche $\sum c_n x^n$ tel que $\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n\right) = 1$.

On trouve $c_0 = 1$ et la relation $\forall n \geq 2$, $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k+1)!} c_k = 0$, c'est-à-dire $c_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k+1)!} c_k$.

Il reste alors à prouver que le rayon de convergence de $\sum c_n x^n$ est > 0, ce qui résulte de $|c_n| \leq 1$.

◀ *Exo 31* : On pose $a_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{2k}\right)$. Montrer que $\sum a_n x^n$ est de rayon $R = 1$ et calculer $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Indication : On a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, donc $R = 1$. On a $2(n+1)a_{n+1} = (2n+1)a_n$.
D'où $\forall x \in]-1, 1[$, $2f'(x) = 2xf'(x) + f(x)$, d'où $f(x) = f(0)(1-x)^{-1/2} = (1-x)^{-1/2}$, car $a_0 = 1$.

◀ *Exo 32* : Montrer que $x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{1-x^n}$ est DSE sur $]-1, 1[$.

Indication : La série cv, car en $O(x^n)$. On utilise alors le th de Fubini pour la somme double $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} x^{np}$.
La famille est sommable pour $|x| < 1$, et on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n$, où $c_n = \sum_{d \text{ divise } n} 1 =$ nombre de diviseurs de n.

◀ *Exo 33* : Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$, où $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{n} a_{n-1}$.

Indication : On a $R \leq 1$, car $a_n \geq 1$. On a $a_{n+1} \leq (1+\varepsilon)a_n$ pour n assez grand, donc $R \geq \frac{1}{1+\varepsilon}$. Donc $R = 1$.

Equations et systèmes linéaires différentiels

- Equations d'ordre 1 : résolution du cas résolu par variation de la constante, raccordements dans le cas général.

Exemple : $xy' = -y + e^x$; on obtient sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, $S_H : y(x) = \frac{k}{x}$, donc $S : y(x) = \frac{e^x + k}{x}$.
Le seul prolongement par continuité en 0 correspond à $y(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ (et φ est C^∞, car DSE en 0).

- Utilisation des séries entières : On peut trouver les solutions DSE en 0 (on doit avoir $R > 0$).

Conseil : Regrouper les termes par degré : $y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^n$ et $xy'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$.

- Équation différentielle discrète : Si $u_{n+1} - 2u_n = \omega_n$.
On obtient $v_{n+1} - v_n = 2^{-n}\omega_n$ en posant $u_n = 2^n v_n$ (méthode de variation de la constante).

◀ *Exo 34* : On suppose $\lim_{+\infty}(f' + f) = 1$. Montrer que f converge en $+\infty$ et déterminer sa limite.

Indication : $f(x) = f(0)e^{-x} + e^{-x} \int_0^x \lambda(t)\ e^t\ dt$, où $\lim_{+\infty} \lambda = 1$. Par Cesàro, $\lim_{n\to+\infty} e^{-x} \int_0^x g(t)\ e^t\ dt = 1$.

Variante : Même question en supposant cette fois $\lim_{+\infty}(f'' + 2f' + f) = 1$. Poser $g = f + f'$.

◀ *Exo 35* : On suppose $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - \dfrac{1}{2} u_n) = 1$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Indication : Si la limite existe, elle vérifie $L - \dfrac{1}{2} L = 1$, c'est-à-dire $L = 2$.
On pose $u_n = \dfrac{1}{2^n} v_n$ et on obtient $v_{n+1} - v_n = 2^{n+1}(1 + \varepsilon_n)$, avec $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.
Donc $u_n = \dfrac{1}{2^n} \left(u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} \varepsilon_k\right)$. On conclut par Cesàro car $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} \varepsilon_k = 0$.

Fonctions de plusieurs variables et calcul différentiel

- Fonctions continues, caractérisation séquentielle.

- Fonctions de classe C^1 : Les dérivées partielles sont continues.

Exemple : $F(x,y) = \int_I f(t,x,y)\ dt$. On a (via les intégrales paramétrées) : $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t,x,y)\ dt$.
On prouve ensuite la continuité de $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ par la caractérisation séquentielle + cv dominée.

- Dérivée le long d'un chemin : $\frac{d}{dt}(f(x_1(t), ..., x_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), ..., x_n(t)) = \operatorname{grad} f(X(t)) \cdot X'(t)$.

- DL2 pour une fonction C^2 : $f(X) = f(0) + \operatorname{grad} f(0) \cdot X + \frac{1}{2} X^T H X + \mathfrak{o}\left(\|X\|\right)^2$,
où $\operatorname{grad} f(X_0) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$ et $H = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in S_n(\mathbb{R})$.

- EDP : On se ramène par changements de variables (affine ou polaire) à des cas simples.

- Extremas : Pour $f : A \to \mathbb{R}$, avec $A \subset \mathbb{R}^n$: Si x extremum local et intérieur à A, alors $\operatorname{grad} f(x) = \overrightarrow{0}$.

Recherche des extremas : On prouve l'existence en se ramenant à un compact K : en prenant $K = \{x \in A \mid f(x) \leq f(x_0)\}$ on a $\sup f = \sup_K f$. Il suffit de choisir x_0 de sorte que K compact non vide.

On obtient ensuite des candidats éventuels avec les points critiques (à l'intérieur de A) et étude de f sur la frontière de A. On en déduit les extrema en comparant les valeurs obtenues.

Exemple : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y)$. On utilise le changement de variables affine $(x,y) = (u, -2u+v)$:
Avec $g(u,v) = f(u, -2u+v)$, on a $\frac{\partial g}{\partial u}(x,y) = g(u,v)$, donc $g(u,v) = \varphi(v)e^u$, d'où $f(x,y) = \varphi(y+2x)e^x$.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Alors f est constante ssi $\forall i,\ \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0$.
En effet, on utilise la formule fondamentale $f(x) = f(0) + \int_0^1 \nabla f(tx) \cdot x\ dt$ pour prouver le sens direct.

Corollaire : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Alors f est affine ssi $\forall (i,j),\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0$.
On utilise la propriété précédente aux dérivées partielles (qui sont de gradient nul, donc constantes).

◀ *Exo 36* : Déterminer les extrema de la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{32}{xy}$ sur $\Delta =]0, +\infty[^2$.
Indication : On a $\sup f = +\infty$ car par exemple $\lim_{n\to+\infty} f(x,x) = +\infty$.
On pose $K = \{(x,y) \mid f(x,y) \leq f(1,1)\}$. On vérifie (avec soin) que K est fermé borné non vide.
Ainsi, f atteint son minimum sur K. On pose $m = \inf f(K)$.
On a $\forall (x,y) \notin K,\ f(x,y) \geq f(1,1) \geq m$, d'où on déduit $\inf f(\Delta) = m$.
Ainsi, f atteint son minimum sur Δ, qui est ouvert. Donc f est atteint en un point (a,b) de gradient nul.

◀ *Exo 37* : Résoudre $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \alpha \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \beta \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, en supposant $X^2 + \alpha X + \beta = (X-a)(X-b)$ scindé sur $\mathbb{R}$.
Indication : Chercher $f(x,y) = g(u,v)$ de sorte que $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x} - a\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x} - b\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

◀ *Exo 38* : On considère $f(x,y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ sur $\Delta =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.
Déterminer les points critiques et préciser si ce sont des extrema locaux stricts.
Indication : On a $\nabla f(x,y) = 0$ ssi $\begin{cases} y = 1/x^2 \\ x = 1/y^2 \end{cases}$, donc ssi $(x,y) = (1,1)$ sur Δ.
La Hessienne en $(1,1)$ est $\begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix} \in S_2^{++}(\mathbb{R})$, donc f admet un minimum local strict.

◀ *Exo 39* : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $x = (x_1, ..., x_n) \to f(x)$ de classe C^2. Soit F un sev de $\mathbb{R}^n$ de dim p.
On suppose $\nabla f(0) = \overrightarrow{0}$ et $\operatorname{Im} H_f(x) \in F$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
a) Montrer que $\nabla f(x) \in F$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
b) Montrer que $f(x)$ ne dépend que de $p(x)$ projeté orthogonal de x sur F.
Indication : a) $\nabla f(x) = \nabla f(0) + \int_0^1 H_f(tx) \cdot x\ dt$.
b) $f(x) - f(y) = \int_0^1 \nabla f(x + t(y-x)) \cdot (y-x)\ dt = 0$ si $y - x \in F^\perp$.
Remarque : On peut prouver b) sans a) avec $f(x) = f(0) + X^T\ \nabla f(0) + \frac{1}{2}\int_0^1 X^T\ H_f(tX)\ X\ dt$.