

Partie A. Coréduction

1) a) Montrer que si deux endomorphismes u et v sont diagonalisables et commutent, alors ils sont codiagonalisables : il existe une base de vecteurs propres communes.

b) Montrer que si deux endomorphismes u et v commutent et sont trigonalisables, ils sont cotrigonalisables.

c) (★) Soit $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux.

Montrer les u_i sont codiagonalisables.

2) a) Soient A et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec N nilpotente et $AN = NA$. Montrer que $\chi_{A+N} = \chi_A$.

b) (X) Soient A et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec N nilpotente et $AN = O_n$.

Montrer (sans utiliser ce qui précède) que $\chi_{A+N} = \chi_A$.

3) Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = \lambda A$, avec $\lambda \neq 0$.

a) Montrer que A n'est pas inversible.

b) Montrer que $\text{Ker } A$ est stable par B .

c) Montrer que A est nilpotente et qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure stricte et $P^{-1}BP$ est triangulaire supérieure.

3) bis) a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est nilpotente ssi $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{tr}(A^k) = 0$.

b) On revient aux hypothèses de 3) : $AB - BA = \lambda A$, avec $\lambda \neq 0$. Montrer que $A^k B - BA^k = \lambda k A^k$.

Avec a), donner une autre preuve de la nilpotence de A .

Partie B. Hausdorffien et quotients de Rayleigh

4) Soit $u \in S(E)$, $(e_1, \dots, e_n)$ une BON de vecteurs propres, de valeurs propres $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k$.

a) On pose $G_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $H_k = \text{Vect}(e_k, \dots, e_n)$.

Montrer que $\sup_{x \in G_k, x \neq 0} \frac{\langle x, u(x) \rangle}{\|x\|^2} = \lambda_k$. On a de même $\inf_{x \in H_k, x \neq 0} \frac{\langle x, u(x) \rangle}{\|x\|^2} = \lambda_k$.

b) Montrer que $\lambda_k = \inf_{F \text{ sev de dim } k} \left(\sup_{x \in F, x \neq 0} \frac{\langle x, u(x) \rangle}{\|x\|^2} \right) = \lambda_k$.

5) Soit $u \in S(E)$ et $v \in S^+(E)$. On note $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ des valeurs propres de u .

a) Montrer que $\max(\text{Sp}(u+v)) \geq \max(\text{Sp } u)$.

b) (★) On suppose $\text{rg } v = 1$. Montrer que les valeurs propres classées $\mu_1, \dots, \mu_n$ de $u+v$ vérifient

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \mu_n$$

Indications :

1) a) Chaque sev propre E_λ de u est stable par v . Les restrictions de v à ces sev propres sont diagonalisables. On considère une base composée de vecteurs propres des $v|_{E_\lambda}$.

b) On procède par récurrence sur $n = \dim E \geq 1$. Il existe λ valeur propre de u . L'ev E_λ est stable par u . alors E_λ est stable par u et sa restriction à E_λ est diagonalisable. Comme $\dim E_\lambda \geq 1$, v admet donc un vecteur propre $x \in E_\lambda$. Ce vecteur x est donc aussi vecteur propre de v .

Donc dans une base de la forme $\mathcal{B} = (x, \dots)$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline O & A \end{array} \right)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}} v = \left(\begin{array}{c|c} \mu & * \\ \hline O & A \end{array} \right)$.

Comme $u \circ v = v \circ u$, alors $B = BA$. De plus, A et B sont trigonalisables (car χ_A divise χ_u donc est scindé).

Par récurrence, A et B sont cotrigonalisables, c'est-à-dire qu'il existe $Q \in GL_{n-1}(K)$ telle que les matrices $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont triangulaires supérieures.

Avec $P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & Q \end{array} \right)$, les matrices $P^{-1} \left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline O & A \end{array} \right) P$ et $P^{-1} \left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline O & B \end{array} \right) P$ sont triangulaires supérieures.

c) On procède par récurrence forte sur $n = \dim E$.

Immédiat si tous les u_i sont des homothéties. Sinon, il existe i tel que u_i n'est pas une homothétie.

Les sev propres de u_i sont stables par les u_j . On applique l'hyp de rec forte sur ces restrictions.

2) a) A et N commutent et sont trigonalisables (on est sur $\mathbb{C}$).

Par 1) b), A et N sont cotrigonalisables, et N nilpotente (donc la matrice triangulaire est sup stricte).

b) On a $\text{Im } N \subset \text{Ker } A$. On choisit une base $\mathcal{B}$ adaptée à $\text{Im } N \oplus S = \mathbb{C}^n$.

On a alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}} n = \left(\begin{array}{c|c} M & * \\ \hline O & O \end{array} \right)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}} a = \left(\begin{array}{c|c} O & * \\ \hline O & B \end{array} \right)$.

Comme M est nilpotente (restriction de n), on a $\chi_M(X) = X^r$, où $r = \text{rg } N$. Donc $\chi_{n+a} = X^r \chi_B = \chi_a$.

3) a) On a $AB = (B + \lambda I)A$. Si A était inversible, B et $B + \lambda I$ seraient semblables : absurde (cf trace).

b) Si $AX = 0$, alors $A(BX) = (B + \lambda I)AX = 0$, donc $BX \in \text{Ker } A$.

c) On considère une base adaptée à $\text{Ker } A \oplus S = \mathbb{C}^n$ qui trigonalise la restriction de b à $\text{Ker } A$.

On a alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}} a = \left(\begin{array}{c|c} O & * \\ \hline O & A_1 \end{array} \right)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}} b = \left(\begin{array}{c|c} T & * \\ \hline O & B_1 \end{array} \right)$, avec T triangulaire supérieure.

Comme $AB - BA = \lambda A$, on a $A_1 B_1 - B_1 A_1 = \lambda A_1$, et on conclut par récurrence forte en considérant une matrice de passage $P = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & Q \end{array} \right)$, avec $Q^{-1} A_1 Q$ et $Q^{-1} B_1 Q$ triangulaires sup.

3) bis) a) Le sens direct est immédiat, car 0 est la seule valeur propre de A (dont de A^k) sur $\mathbb{C}$.

Réciproquement, supposons $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{tr}(A^k) = 0$.

Alors $\text{tr}(P(A)) = 0$ pour tout polynôme P de degré $\leq n$ tel que $P(0) = 0$.

Par Lagrange, il existe un polynôme P de degré $\leq n$ tel que $P(0) = 0$ et $\forall \lambda \in \text{Sp}(A) \setminus \{0\}$, $P(\lambda) = 1$.

Alors $\text{tr}(P(A))$ est le nombre m de valeurs propres non nulles de A (avec multiplicité). Donc $m = 0$.

b) Par récurrence sur k , on a $A^k B = (B + \lambda I)A^k$, c'est-à-dire $A^k B - BA^k = \lambda k A^k$.

Donc $\text{tr}(\lambda k A^k) = 0$, et ainsi $\text{tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

4) et 5) cf TD entraînement n°5. En particulier :

4) b) Noter que si $\dim F = k$, alors $F \cap H_k$ contient un vecteur non nul x .

5) a) Utiliser $\langle x, (u + v)(x) \rangle = \langle x, u(x) \rangle + \langle x, v(x) \rangle$.