

Algèbre générale : arithmétique, nombres complexes, polynômes

◀ *Exo 1* : Les points (distincts) d'affixes a, b, c forment un triangle équilatéral ssi $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3}$ ou $\frac{c-a}{b-a} = e^{-i\pi/3}$.

Or, $(x = e^{i\pi/3}$ ou $x = e^{-i\pi/3})$ ssi x racine de $(x^2 - x + 1)$.

Donc a, b, c forment un triangle équilatéral ssi $\left(\frac{c-a}{b-a}\right)^2 - \left(\frac{c-a}{b-a}\right) + 1 = 0$.

En développant, on obtient la CNS $a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c$.

◀ *Exo 2* : Notons $a_1, \dots, a_r$ les racines de P , et $m_1, \dots, m_r$ leurs ordres de multiplicité.

Sur $\mathbb{C}$, P est scindé, donc $\sum_{i=1}^r m_i = n$.

Le nombre de racines communes à P et P' est $\sum_{i=1}^r (m_i - 1)$. C'est donc le degré de $\text{pgcd}(P, P')$.

Donc P' divise P ssi $\sum_{i=1}^r (m_i - 1) = n - 1$, c'est-à-dire $r = 1$.

Réciproque immédiate. Les solutions sont donc les $P(X) = \lambda(X - a)^n$.

◀ *Exo 3* : Supposons $P(X)P(X - 1) = P(X^2)$ avec P non nul. Alors P est unitaire.

Si z est racine de P , alors z^2 est racine. On en déduit que $|z| = 0$ ou 1 .

En effet, sinon, il y aurait une infinité de racines (les $z^{(2^n)}$ étant alors distincts).

De même, si z est racine, $(z + 1)^2$ aussi.

0 ne peut être racine, car sinon, 1 puis 2^2 seraient racines, ce qui est absurde.

Donc $|z| = |z + 1| = 1$, et on en déduit (intersection de cercles) $z \in \{e^{i2\pi/3}, e^{-i2\pi/3}\}$.

Comme P est réel, les deux racines conjuguées ont même ordre de multiplicité. Et P est unitaire (car $\lambda^2 = \lambda$ implique $\lambda = 1$). Donc $P = (X^2 + X + 1)^m$, avec $m \in \mathbb{N}$. Réciproque par calcul direct.

◀ *Exo 4* : Posons $A(X) = (X + 1)^n - (X - 1)^n$.

On a z racine de A ssi $z \neq 1$ et $\frac{z+1}{z-1} = e^{i\theta}$, avec $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ (avec $0 \leq k < n$).

On a $\frac{z+1}{z-1} = e^{i\theta}$ ssi $z = \frac{e^{i\theta} + 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{\cos(\theta/2)}{i \sin(\theta/2)}$.

Les racines de A sont donc $z_k = \frac{\cos(k\pi/n)}{i \sin(k\pi/n)}$, avec $0 < k < n$ (on exclut $k = 0$).

Or, A est de degré $(n - 1)$ et de coefficient dominant $2n$.

On en déduit que A est scindé à racines simples et $A(X) = 2n \prod_{k=1}^{n-1} (X - z_k)$.

◀ *Exo 5* : a) Supposons $\exists v, w = v \circ u$. Alors $\text{Ker } u \subset \text{Ker } w$.

Réciproquement, supposons $\text{Ker } u \subset \text{Ker } w$.

Soit S un supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans E . On a $S \oplus \text{Ker } u = E$.

On sait que $\hat{u} : S \rightarrow \text{Im } u$ $x \mapsto u(x)$ est un isomorphisme.

On considère alors v définie par $\forall x \in \text{Im } u, v(x) = (\hat{u})^{-1}(x) \in E$.

On choisit v arbitrairement sur un supplémentaire de $\text{Im } u$. Ce qui définit v complètement.

On a bien $w = v \circ u$.

Variante : On définit v à partir d'une base de $\text{Im } u$, en prenant $v(e) = (\hat{u})^{-1}(x) \in E$.

b) Supposons $\exists u, w = v \circ u$. Alors $\text{Im } w \subset \text{Im } v$.

Réciproquement, supposons $\text{Im } w \subset \text{Im } v$.

On considère $(e_j)_{j \in I}$ une base de E .

Pour tout j , on a $w(e_j) \in \text{Im } w \subset \text{Im } v$, donc il existe f_j tel que $v(f_j) = w(e_j)$.

On définit u linéaire par $u(e_j) = f_j$ pour tout j .

On a bien $w(e_j) = (v \circ u)(e_j)$ pour les $e \in \{j\}$ donc par linéarité, $w = v \circ u$.

◀ *Exo 6* : a) On a $AE_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ki}E_{kj}$. On considère la matrice de u dans la base $(E_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ pris dans un ordre judicieux de sorte que la matrice de u soit une matrice diagonale par blocs où tous les blocs sont égaux à la matrice A . Il suffit de classer les E_{ij} de sorte que les ceux qui ont le même j soient consécutifs : $\mathcal{B} = (E_{k,1})_{1 \leq k \leq n} \cup (E_{k,2})_{1 \leq k \leq n} \cup \dots \cup (E_{k,n})_{1 \leq k \leq n}$.

b) On a $u = w \circ v$ où $\omega : M \mapsto M \mapsto MB$.

En effet, $E_{ij}A = \sum_{k=1}^n a_{jk}E_{ik}$. On obtient alors dans une base adéquate la matrice de u diagonale par blocs où tous les blocs sont égaux à la matrice B^T . Donc $\det w = (\det B^T)^n = (\det B)^n$.

On vérifie de façon analogue au a) que $\det w = (\det B)^n$, donc $\det u = \det w \times \det v = (\det A \det B)^n$.

◀ *Exo 7* : Il s'agit ici de l'interpolation d'Hermite (variante de l'interpolation de Lagrange).

L'idée consiste en fait à prouver que $u : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad P \mapsto (P(a), P(b), P'(a), P'(b))$ est bijective.

Or, u est linéaire et injective, on est bijective par dimension, car $\dim \mathbb{R}_3[X] = \dim \mathbb{R}^4$.

Montrons que u est injective : Si $u(P) = 0$, alors a et b sont racines de P d'ordre ≥ 2 , donc $P = 0$ (car $\deg P \leq 3$).

◀ *Exo 8* : On a $\text{tr}(\sum_{i=1}^r p_i) = \text{tr}(\text{Id}) = n$. Comme $\text{rg}(p_i) = \text{tr}(p_i)$. Donc $\sum_{i=1}^r \text{rg } p_i = n$.

On a $\sum_{i=1}^r p_i = \text{Id}$, donc a fortiori $\sum_{i=1}^r \text{Im } p_i = E$.

Mais on a $\sum_{i=1}^r \text{rg } p_i = n$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^r \dim(\text{Im } p_i) = \dim E$.

On en déduit $\oplus_{i=1}^r \text{Im } p_i = E$.

Soit $x \in E$, on a $x = \sum_{i=1}^r p_i(x)$ est la décomposition de x dans $\oplus_{i=1}^r \text{Im } p_i$

Donc $p_i(x)$ est le projeté de x sur $\text{Im } p_i$ parallèlement à $\oplus_{j \neq i} \text{Im } p_j$.

Donc $\text{Im } p_j \subset \text{Im } p_i$ pour tout $i \neq j$, donc $p_i \circ p_j = 0$.

◀ *Exo 1* : Le polynôme $P(x) = x^3 - x - 1$ annule A .

On vérifie (par une étude de fonctions) que P admet une unique racine réelle α , et que $\alpha > 0$.

Donc P admet dans $\mathbb{C}$ des racines $\alpha, \beta, \bar{\beta}$, avec β non réel, et donc P est scindé à racines simples.

Donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, et est semblable à une matrice $\text{Diag}(\alpha, \dots, \alpha, \beta, \dots, \beta, \bar{\beta}, \dots, \bar{\beta})$.

Comme A est réel, le polynôme caractéristique de A est réel, donc il y a autant de β que de $\bar{\beta}$.

On en déduit que $\det A = \alpha^p (\beta \bar{\beta})^q = \alpha^p |\beta|^{2p} > 0$.

◀ *Exo 2* : On a $p^2 = p$ et $q^2 = q$.

On a $p + q$ projecteur ssi $(p + q)^2 = p + q$, donc ssi $p \circ q + q \circ p = 0$.

Supposons $p + q$ projecteur. On a $p \circ q + q \circ p = 0$.

En composant par p , $p \circ q + p \circ q \circ p = 0$, c'est-à-dire $p \circ q \circ (p + \text{Id})$.

Or, $p + \text{Id}$ inversible (valeurs propres 1 et 2), donc $p \circ q = 0$, et ainsi $q \circ p = 0$.

Si $p \circ q = q \circ p = 0$, alors $p + q$ projecteur.

De plus, p et q commute, donc sont codiagonalisables (car $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$ stables par q).

On en déduit qu'il existe une base de E tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}} p = \left(\begin{array}{c|c|c} I & & \\ \hline & O & \\ \hline & & O \end{array} \right)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}} q = \left(\begin{array}{c|c|c} O & & \\ \hline & I & \\ \hline & & O \end{array} \right)$.

On en conclut que $p + q$ est la projection sur $(\text{Im } p \oplus \text{Im } q)$ parallèlement à $\text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.

◀ *Exo 3* : On note u l'endomorphisme canoniquement associé à u .

On a A semblable à une matrice dont les $(n - 1)$ premières colonnes sont nulles.

On peut en conclure aisément a).

Supposons désormais $\text{tr } A = 0$. Justifier que $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$, puis une base (e_{n-1}) de $\text{Im } u$, complétée en une base $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de $\text{Ker } u$. On complète avec $e_n = u(e_{n-1})$.

◀ *Exo 4* : a) cf TD 07

b) On note que $\text{rg}(A - \lambda I_n) \geq n - 1$ (car les $n - 1$ dernières colonnes de $A - \lambda I_n$ sont indépendantes).

Donc $\dim E_\lambda \leq 1$ pour tout λ .

Donc A est diagonalisable ssi A admet n valeurs propres distinctes, donc ssi χ_A scindé à racines simples.

◀ *Exo 5* : a) Si A diagonalisable, alors A^2 diagonalisable (dans la même base).

Réciproquement, supposons A^2 diagonalisable.

Ainsi, $P(X) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A^2)} (X - \lambda)$ annule A^2 , c'est-à-dire $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(A^2)} (A^2 - \lambda I) = O$.

Donc $Q(X) = P(X^2) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A^2)} (X^2 - \lambda)$ annule A .

Or, A et donc A^2 sont inversibles, donc les $\lambda \in \text{Sp}(A^2)$ sont non nuls.

Tout $\lambda \in \mathbb{C}$ non nul, admet deux racines carrées μ et $-\mu$ distinctes.

Donc Q est scindé à racines simples, et ainsi, A est diagonalisable.

Remarque : Faux si A n'est pas inversible. Contre-exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Autre solution : A et A^2 commute, donc les sev propres de A^2 sont stables par A .

Dans une base adaptée, on a donc

$$A^2 = P \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 I & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & \lambda_r I \end{array} \right) P^{-1} \text{ et } A = P \left(\begin{array}{c|c|c} B_1 & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & B_r \end{array} \right) P^{-1}$$

Sur chaque sev propre E_λ , de A^2 , on a donc $(B_j)^2 = \lambda_j I$.

Comme λ_j non nul, alors $X^2 - \lambda_j$ scindé à racines simples, donc B_j diagonalisable.

Donc A diagonalisable.

b) Le sens direct est simple à vérifier (on se ramène au cas où A est diagonale).

Réciproquement supposons A^2 diagonalisable et $\text{Ker } A = \text{Ker } A^2$.

Notons $\Delta = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ l'ensemble des valeurs propres non nulles de A^2 .

On a donc $\text{Ker}(A^2) \oplus \text{Ker}(A^2 - \lambda_1 I) \oplus \text{Ker}(A^2 - \lambda_2 I) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(A^2 - \lambda_r I) = E$.

Or, si on note μ_j et $-\mu_j$ les racines carrées de λ_j , on a $\text{Ker}(A^2 - \lambda_j I) = \text{Ker}(A^2 - \mu_j I) \oplus \text{Ker}(A^2 + \mu_j I)$.

En effet, sur $F = \text{Ker}(A^2 - \lambda_j I)$, on a $a^2 = \lambda_j \text{Id}$, donc a diagonalisable de valeurs propres λ_j et $-\lambda_j$.

Comme $\text{Ker } A = \text{Ker } A^2$, alors $\text{Ker } A \oplus \text{Ker}(A - \mu_1 I) \oplus \text{Ker}(A + \mu_1 I) \oplus \dots = E$.

Donc A diagonalisable.

Autre solution (conseillée) : On utilise comme au a) le fait que les sev propres E_λ de A^3 sont stables par A . Comme $\text{Ker } A = \text{Ker } A^2$, il existe un changement de base tel que

$$A^2 = P \left(\begin{array}{c|c|c|c} O & & & \\ \hline & \lambda_1 I & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & \lambda_r I \end{array} \right) P^{-1} \text{ et } A = P \left(\begin{array}{c|c|c|c} O & & & \\ \hline & B_1 & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & B_r \end{array} \right) P^{-1}$$

On a alors $(B_j)^2 = \lambda_j I$, avec λ_j non nul, donc B_j diagonalisable. Donc A diagonalisable.

c) Supposons A antisymétrique. Alors A^2 est symétrique réelle, donc diagonalisable.

Or, $A^2 = -A^T A$, donc $\text{Ker } A = \text{Ker } A^2$ (car $(X | A^2 X) = -\|AX\|^2$ implique $\text{Ker } A^2 \subset \text{Ker } A$).

On conclut par b) que A est diagonalisable..

De plus, les valeurs propres de $A^2 = -A^T A$ sont dans $\mathbb{R}^-$, donc celles de A dans $i\mathbb{R}$.

d) Le rang de A diagonalisable est le nombre de racines non nulles de χ_A .

Or, par c), A est diagonalisable et les valeurs propres de A non nulles sont non réelles, donc les valeurs propres non nulles sont deux à deux conjuguées (car χ_A réel). Donc $\text{rg } A$ pair.

Remarque : La relation $\forall X \in \mathbb{R}^n, (X | AX) = 0$ prouve que 0 est la seule racine réelle éventuelle.

Autre solution : Soit A antisymétrique. On considère une BON de $\mathbb{R}^n$ adaptée à $\text{Ker } A \oplus (\text{Ker } A)^\perp = \mathbb{R}^n$.

On se ramène alors au cas où $A = U \left(\begin{array}{c|c} O & C \\ \hline O & B \end{array} \right) U^T$, où $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, avec $r = \text{rg } A$

Or, $\left(\begin{array}{c|c} O & C \\ \hline O & B \end{array}\right)$ est antisymétrique (comme A), donc $C = O$.

On en déduit que $A = U \left(\begin{array}{c|c} O & C \\ \hline O & B \end{array}\right) U^T$, que $\text{rg } A = \text{rg } B = r$ et donc B est inversible.

Donc $\det B \neq 0$. Or, $\det B = \det(B^T) = \det(-B) = (-1)^r \det B$, et donc r pair.

◀ *Exo 6* : a) On a $M^k = \left(\begin{array}{c|c} A^k & * \\ \hline O & B^k \end{array}\right)$, donc pour tout polynôme P , on a $P(M) = \left(\begin{array}{c|c} P(A) & * \\ \hline O & P(B) \end{array}\right)$.

Donc tout polynôme annulateur (scindé à racines simples) de M annule A et B .

Ainsi, si M diagonalisable, alors A et B diagonalisables.

b) On peut remarquer que $\text{Sp}(M) = \text{Sp}(A) \cup \text{Sp}(B)$, car $\chi_M = \chi_A \chi_B$.

Remarque : On en déduit que M est diagonalisable ssi le polynôme $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(A) \cup \text{Sp}(B)} (X - \lambda)$ annule M .

On note que si $P(A) = O_n$ et $Q(B) = O_p$, alors

$$(PQ)(M) = P(M)Q(M) = \left(\begin{array}{c|c} O & * \\ \hline O & * \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline O & O \end{array}\right) = O_{n+p}$$

On prend alors $P(X) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda)$ et $Q(X) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(B)} (X - \lambda)$. On a donc $(PQ)(M) = O$.

Comme $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$, alors PQ est scindé à racines simples, donc M est diagonalisable.

Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O & B \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{C})$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

◀ *Exo 7* : Il existe $P = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \in GL_2(K)$ tel que $P^{-1} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ diagonale.

On passe alors aux produits par blocs (mêmes types d'opérations lors des produits de matrices).

Par exemple, on a $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + c\lambda & * \\ * & * \end{pmatrix}$,

d'où de même $\left(\begin{array}{c|c} aA & cA \\ \hline bA & dA \end{array}\right) \begin{pmatrix} \alpha I & \gamma I \\ \beta I & \delta I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a\alpha + c\lambda)A & * \\ * & * \end{pmatrix}$.

On en déduit $\begin{pmatrix} \alpha I & \gamma I \\ \beta I & \delta I \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{array}{c|c} aA & cA \\ \hline bA & dA \end{array}\right) \begin{pmatrix} \alpha I & \gamma I \\ \beta I & \delta I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A & 0 \\ 0 & \mu A \end{pmatrix}$.

Comme A diagonalisable, alors $\begin{pmatrix} \lambda A & 0 \\ 0 & \mu A \end{pmatrix}$ diagonalisable, donc M diagonalisable.

Remarque : Si on note $B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $M = B \otimes A = \left(\begin{array}{c|c} aA & cA \\ \hline bA & dA \end{array}\right)$ le produit tensoriel,

on a $\boxed{(P \otimes A)(Q \otimes A) = (PQ) \otimes A}$, et en particulier, $(P \otimes A)^{-1} = (P^{-1} \otimes A)$.

Ici, avec $P^{-1}BP = D$, on a $(P \otimes A)^{-1}(B \otimes A)(P \otimes A) = (P^{-1}BP) \otimes A = D \otimes A$.

◀ *Exo 8* : a) Posons $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$, donc $\chi_A(B) = \prod_{i=1}^r (B - \lambda_i \text{Id})^{m_i}$.

$\chi_A(B)$ est inversible ssi $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\det((B - \lambda_i \text{Id}) \neq 0$, donc ssi $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\lambda_i \notin \text{Sp}(B)$.

Or, les λ_i sont exactement les valeurs propres de A .

b) Si P inversible, $MP = O_n$ implique $M = O_n$.

Réciproquement, supposons P non inversible. Alors $\text{Im } P \neq \mathbb{C}^n$.

On choisit alors M comme un endomorphisme non nul tel que $\text{Ker } M = \text{Im } P$.

Remarque : On peut aussi par changement de base se ramener au cas où $P = \left(\begin{array}{c|c} O & O \\ \hline * & * \end{array}\right)$,

et on peut alors prendre $M = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right)$.

c) Par dimension, u est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ssi u injectif, c'est-à-dire $\text{Ker } u = \{0\}$.

Or, supposons $M \in \text{Ker } u$. On a alors $AM = MB$, donc $A^k M = MB^k$, donc $\chi_A(A) M = M \chi_A(B)$.

Comme $\chi_A(A) = O$, alors $M \chi_A(B) = O$.

Si $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$, alors $\chi_A(B)$ est inversible, donc $M = O$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $\lambda \in \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B)$.

On veut montrer qu'il existe M non nulle telle que $AM = MB$.

En fait, $AM = MB$ ssi $(A - \lambda I)M = M(B - \lambda I)$, donc on se ramène au cas où $\lambda = 0$.

Ainsi, on suppose $0 \in \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B)$, c'est-à-dire A et B non inversibles.

On construit alors M non nulle (par exemple de rang 1) telle que $\text{Im } B \subset \text{Ker } M$ et $\text{Im } M \subset \text{Ker } A$.

Plus précisément, dans des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ respectivement adaptées à $\text{Im } B \oplus S$ et $\text{Ker } A \oplus T$, on choisit l'endomorphisme m de sorte que $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \left(\begin{array}{c|c} O & P \\ \hline O & O \end{array} \right)$, avec P arbitraire non nulle.

Et alors M est la matrice de m dans les bases canoniques.

◀ *Exo 9* : a) On note v et w commutent et $(v \circ w)(M) = AMB$.

Par le binôme; $u^m = (v - w)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} v^k w^{m-k}$.

Comme v et w sont nilpotentes en $\dim n$, on a $v^n = w^n = O$.

On prend donc $m = 2n - 1$. On a alors $\forall k \in \llbracket 0, m \rrbracket$, $k \geq n$ ou $n - k \geq n$. Donc $u^m = 0$.

Algèbre bilinéaire

◀ *Exo 10* : Si p projecteur orthogonal, alors par Pythagore $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geq \|p(x)\|^2$.

Réciproquement, soit p projection sur F parallèlement à G , et telle que $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Il s'agit de prouver que F et G sont orthogonaux. Soient $y \in F$ et $z \in G$.

On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $\|ty + z\|^2 = \|ty\|^2$, car $p(ty + z) = ty$, donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $2\langle y, z \rangle t + \|z\|^2 \geq 0$, donc $\langle y, z \rangle = 0$.

◀ *Exo 11* : B est symétrique réelle, donc diagonalisable.

Soit λ une valeur propre de B , et X un vecteur propre de valeur propre λ .

On a $(X | BX) = \lambda \|X\|^2$. Or, $(X | BX) = (X | AX) + (X | A^T X) = 2(X | AX)$.

Par Cauchy-Schwarz, $|(X | AX)| \leq \|X\| \|AX\| = \|X\|^2$. Comme $X \neq 0$, $\lambda \in [-2, 2]$.

◀ *Exo 11 bis* : a) cf TD d'entraînement 05 exo A.

b) Idée : Tout sev G de H de dimension k est en particulier un sev de E . Donc $\lambda_k \leq \mu_k$.

D'autre part, tout sev G de H de dimension k s'écrit $F \cap H$, où F sev de E de dimension $(k + 1)$.

On en déduit $\mu_k \leq \lambda_{k+1}$.

◀ *Exo 12* : a) On a $A = ZZ^T$, où $Z = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Donc $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ matrice de Gram.

b) Exemple : $B = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 \\ t_1 & t_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t_2 - t_1 \end{pmatrix}$ somme de matrices de $S_n^+(\mathbb{R})$.

Une somme de matrices symétriques positives est symétrique positive, avec $(X \mid MX) + (X \mid NX)$.

De façon générale, posons $B(t_1, \dots, t_n) = (\min(t_i, t_j))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$.

On a alors $B(t_1, \dots, t_n) = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & & t_n \end{pmatrix} = B(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_1) + B(0, t_2 - t_1, t_3 - t_1, \dots, t_n - t_1)$.

On peut conclure par récurrence, car si $M \in S_n^+(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} O & O \\ O & M \end{pmatrix} \in S_n^+(\mathbb{R})$.

◀ Exo 13 : Idée : $\frac{1}{i+j+1} = \langle f_i, f_j \rangle$, où $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$ et $f_j(t) = t^j$.

Donc $X^T A X = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n x_i x_j \langle f_i, f_j \rangle = \|\sum_{i=0}^n x_i f_i\|^2 \geq 0$.

◀ Exo 14 : a) Dans une BON $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de diagonalisation de u , $\langle x, u(x) \rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^2$.

Or, $\text{tr } u = \sum_{j=1}^n \lambda_j = 0$, donc on a $\langle x, u(x) \rangle = 0$ en prenant $x = \sum_{j=1}^n e_j$.

b) Supposons $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ On considère une BON $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, avec $e_1 = x$ défini au a).

On a alors A orthosemblable à $A' = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & C \end{pmatrix}$ symétrique, donc C symétrique de trace nulle.

On conclut par récurrence sur n : par hyp de récurrence, $C = V D V^{-1}$ avec D de diagonale nulle.

On prend alors $U = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & V \end{pmatrix}$ et on obtient $U^{-1} A' U = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & V^{-1} C V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & D \end{pmatrix}$.

◀ Exo 15 : a) Avec le th spectral : $A = U^T D U$ avec D diagonale à coefficients réels strictement positifs.

Donc il suffit de prendre $M = U^T D^{1/2} U$ symétrique définie positive.

b) $A^{-1} B = M^{-2} B = M^{-1} (M^{-1} B M^{-1}) M$, donc $A^{-1} B$ est semblable à $P B P$, où $P = M^{-1}$.

Comme B symétrique réelle, $P B P$ symétrique réelle, donc diagonalisable.

◀ Exo 16 : a) Avec $A = U^T D U$ avec D diagonale, la matrice $P = D^{-1/2} U$ convient.

b) Avec les notations de a), on a $P^T A P = I_n$ et $S = P^T B P$ symétrique.

Donc il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $U^T S U$ diagonale. Avec $Q = P U$, on a $Q^T A Q = I_n$ et $Q^T B Q$ diagonale.

◀ Exo 17 : a) On a $A = \alpha J + (1 - \alpha) I_n$.

Or, J symétrique réelle de rang 1 est semblable à $\text{Diag}(0, \dots, 0, p)$, car $\text{tr } J = p$.

Donc A diagonalisable de valeurs propres $1 - \alpha, \dots, 1 - \alpha, (p - 1)\alpha + 1$.

Donc $\text{rg } J = 1$, $n - 1$ ou n respectivement pour $\alpha = 1$, $\alpha = -\frac{1}{p-1}$ et $\alpha \notin \{1, -\frac{1}{p-1}\}$.

b) Posons $A = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq p}$ matrice de Gram. Comme $\alpha \neq 1$, alors par a), $\text{rg } A = p - 1$ ou p .

Mais $\text{rg } A = \text{rg}(x_1, \dots, x_p)$: en effet, si $A = M^T M$, on montre que $\text{rg } A = \text{rg } M$ (même noyau en fait).

Donc $p - 1 \leq n$, c'est-à-dire $p \leq n - 1$.

Dans le cas $p = n - 1$, on a nécessairement $\alpha = -\frac{1}{p-1} = -\frac{1}{n}$.

◀ Exo 18 : On a A^2 symétrique. Comme $A^2 = -A^T A$, alors $A^2 \in S_n^-(\mathbb{R})$, donc sur $\mathbb{C}$, $\text{Sp}(A) \subset i\mathbb{R}$.

On a $A^2 = B$ diagonalisable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans une BON. Les sev propres de B sont stables par A .

On se ramène donc à des équations $a^2 = \lambda \text{Id}$, où a est antisymétrique.

Si λ non nul, on en déduit a diagonalisable (car $X^2 - \lambda$ scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$).

Si $\lambda = 0$, alors $a^2 = 0$. On va prouver que $a = 0$. Il suffit de justifier que la seule matrice antisymétrique vérifiant $A^2 = O$ est la matrice nulle. Cela résulte de $0 = \text{tr}(A^2) = -\text{tr}(A^T A) = -\|A\|_2^2$.