Opus 17. **Fonctions analytiques et fonctions harmoniques. Corrigé**

1) a) On a $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=\cos\theta\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(M)+\sin\theta\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(M)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial\theta}(M)=-r\sin\theta\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(M)+r\cos\theta\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(M)$.

Donc $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)=\cos^2\theta\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M)+2\sin\theta\cos\theta\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(M)+\sin^2\theta\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M)$.

Et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(r,\theta)=r^2\sin^2\theta\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M)-2\sin\theta\cos\theta\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(M)+r^2\cos^2\theta\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M)-r\cos\theta\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(M)-r\sin\theta\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(M)$.

On conclut $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(r,\theta)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M)+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M)$ car $\cos^2+\sin^2=1$.

b) On a $J(r)=\int_0^{2\pi}g(r,\theta)\ d\theta$. Par th de dérivation (cf cours ...), $J'(r)=\int_0^{2\pi}\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\ d\theta$ et $J''(r)=\int_0^{2\pi}\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)\ d\theta$.

Donc par a), $J''(r)+\dfrac{1}{r}J'(r)=\int_0^{2\pi}\Delta f(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)\ d\theta-\dfrac{1}{r^2}\int_0^{2\pi}\dfrac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(r,\theta)\ d\theta$.

Or, $\theta\longmapsto g(r,\theta)$ est 2π-périodique, donc $\theta\longmapsto\dfrac{\partial g}{\partial\theta}(r,\theta)$ l'est aussi.

On en déduit que $\int_0^{2\pi}\dfrac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}r,\theta)\ d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\dfrac{\partial g}{\partial\theta}(r,\theta)\right]_0^{2\pi}=0$, d'où le résultat.

2) a) Supposons i). Alors $J''(r)+\dfrac{1}{r}J'(r)=0$, donc $J'(r)=\dfrac{a}{r}$, et $J(r)=a\ln r+b$, avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

Mais J admet une limite en 0, qui vaut $2\pi f(x_0,y_0)$ (par continuité des intégrales paramétrées).

Donc $a=0$, puis $b=2\pi f(x_0,y_0)$, donc $J(r)=2\pi f(x_0,y_0)$, $\forall r\geq 0$. D'où ii).

Réciproquement, supposons ii). Alors J est contante, donc par 1), on a $\forall r>0$, $\int_0^{2\pi}\Delta f(M_0+re^{i\theta})\ d\theta=0$.

En particulier, pour $r\to 0$, on obtient $\Delta f(x_0,y_0)=0$. Donc $\Delta f=0$ (car le point M_0 est arbitraire).

b) Comme K compact et f continue, $M=\sup_K f$ est atteint sur K. Supposons qu'il est atteint en un point $A\in K$.

Alors il existe un cercle $D(A,r)$ inclus dans K et contenant un point du bord.

Par la propriété de la moyenne, la valeur de f sur Γ est nécessairement constante de valeur M (en effet, elle est inférieure à M et de valeur moyenne M). Ce qui prouve que M est atteint sur le bord.

3) On suppose f harmonique sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, on pose $v_n(r)=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\ e^{-in\theta}\ d\theta$.

a) Posons $G(r,\theta)=g(r,\theta)\ e^{-in\theta}$, où $g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$. Ainsi, $v_n(r)=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}G(r,\theta)\ d\theta$

On a $r^2v_n''(r)+rv_n'(r)=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\dfrac{\partial G}{\partial r}+\dfrac{\partial^2 G}{\partial r^2}\right)(r,\theta)\ d\theta$.

Or, $\dfrac{\partial G}{\partial r}+\dfrac{\partial^2 G}{\partial r^2}=\left(\dfrac{\partial g}{\partial r}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}\right)\ e^{-in\theta}$, donc $r^2v_n''(r)+rv_n'(r)=\int_0^{2\pi}-\dfrac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}\ \ e^{-in\theta}\ d\theta$.

On conclut en intégrant deux fois par parties : $\int_0^{2\pi}-\dfrac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(r,\theta)\ e^{-in\theta}\ d\theta=(in)^2\int_0^{2\pi}-g(r,\theta)\ e^{-in\theta}\ d\theta=n^2v_n(r)$.

b) cf TD sur les équations différentielles exercice B.

c) Soit $r\geq 0$. La fonction $\theta\longmapsto f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ est de classe C^2 et 2π-périodique, donc par le théorème de Fourier, on a $\forall\theta$,

$f(r\cos\theta,r\sin\theta)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}v_n(r)e^{in\theta}$. Or, $v_n(r)=c_nr^{|n|}$, donc $f(r\cos\theta,r\sin\theta)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_nr^{|n|}e^{in\theta}$.

d) Comme f est à valeurs réelles, $f(x,y)=\mathrm{Re}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n\,|r|^n\ e^{in\theta}\right)$, donc de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nr^n\cos(n\theta)+\sum_{n=1}^{+\infty}b_nr^n\sin(n\theta)$.

4) Supposons i) : Par 3), $f(r\cos\theta,r\sin\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nr^n\cos(n\theta)+\sum_{n=1}^{+\infty}b_nr^n\sin(n\theta)$.

Donc $f(x,y)=\mathrm{Re}(F(z))$, avec $F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n-ib_n)z^n$. D'où ii).

Réciproquement, supposons ii) : $f(x,y) = \mathrm{Re}(F(x+iy))$.

En posant $\varphi(x,y) = F(x+iy) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x+iy)^n$, on a $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = i \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n c_n (x+iy)^{n-1}$.

D'où on déduit $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = i \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)$, et donc a fortiori $\Delta\varphi = 0$. donc $\Delta f = \mathrm{Re}(\Delta \varphi) = 0$. D'où i).

5) a) Par deux IPP successives, $d_n = \dfrac{-1}{2\pi n^2} \int_0^{2\pi} h''(\theta)\ e^{-in\theta}\ d\theta$. Donc $|d_n| \leq \dfrac{1}{2\pi n^2} \int_0^{2\pi} |h''(\theta)|\ d\theta$.

b) La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{in\theta}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Posons $g(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{in\theta}$. Alors g est continue (par cv normale) et est 2π-périodique.

De plus, par intégration terme à terme, $\dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) e^{-in\theta}\ d\theta = d_n$.

Donc fonction $f(\theta) = h(\theta) - g(\theta)$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta}\ d\theta = d_n - d_n = 0$, donc $f = 0$.

On en conclut $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $h(\theta) = g(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{in\theta}$