Opus 17. Fonctions analytiques et fonctions harmoniques

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ \ (x,y) \longmapsto f(x,y)$ de classe C^2. On pose $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

1) a) *Laplacien en coordonnées polaires*

Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On pose $g(r,\theta) = f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) = f(M_0 + re^{i\theta})$. Montrer que

$$\Delta f(M_0 + re^{i\theta}) = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}\right)(r,\theta)$$

b) On pose $\forall r \geq 0,\ J(r) = \int_0^{2\pi} f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\ d\theta$.

Montrer que $\forall r > 0,\ J''(r) + \dfrac{1}{r}J'(r) = \int_0^{2\pi} \Delta f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\ d\theta$.

2) a) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est harmonique, c'est-à-dire $\Delta f = 0$

ii) f vérifie la propriété de valeur moyenne : $\forall (x_0,y_0),\ \forall r \in \mathbb{R}^+,\ \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\ d\theta = f(x_0,y_0)$.

b) (★) *Cette question n'est pas utilisée dans la suite*. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique et K une partie compacte de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\sup_K f$ est atteint en un point de la frontière de K.

3) On suppose f harmonique sur $\mathbb{R}^2$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $v_n(r) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\ e^{-in\theta}\ d\theta$.

a) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\forall r > 0,\ r^2 v_n''(r) + r v_n'(r) - n^2 v_n(r) = 0$.

Indication : Montrer d'abord puis utiliser : $r^2 v_n''(r) + r v_n'(r) = -\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}\right)\ e^{-in\theta}$.

b) En utilisant le changement de variable $r = e^s$, en déduire qu'il existe $c_n \in \mathbb{C}$ tel que $\forall r \geq 0,\ v_n(r) = c_n r^{|n|}$.

c) Montrer que $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta}$.

Attention : On admet le théorème de Fourier : Si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est C^2 et 2π-périodique, alors

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ h(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{in\theta},\ \text{où } d_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\theta)\ e^{-in\theta}\ d\theta$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{in\theta}$ est de plus absolument convergente, c'est-à-dire $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |d_n| < +\infty$.

d) En déduire qu'il existe des suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n r^n \sin(n\theta)$$

4) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est harmonique, c'est-à-dire $\Delta f = 0$

ii) f est la partie réelle d'une série entière : il existe $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ telle que $f(x,y) = \mathrm{Re}(F(x+iy))$.

5) *Complément* : *Preuve du théorème de Fourier*

On note E le sev des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

On suppose connue la propriété de densité :

Si $f \in E$ vérifie $\forall n \in \mathbb{Z},\ \int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\ d\theta = 0$, alors f est identiquement nulle.

a) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et 2π-périodique. Montrer que $d_n = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\theta)\ e^{-in\theta}\ d\theta = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

b) Avec les hypothèses de a), montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ h(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{in\theta}$