**Opus n°16. Fonctions de plusieurs variables. Corrigé.**

**1)** a) L'application $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R} \quad t \longmapsto f(tx)$ est dérivable, et $\varphi'(t) = \nabla f(tx) \cdot x$.

Comme $\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\, dt$, alors on obtient $f(x) = f(0) + \int_0^1 \operatorname{grad} f(tx) \cdot x\, dt$.

b) Supposons $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 0$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$. Alors $\operatorname{grad} f(x) = \overrightarrow{0}$ pour tout $x$. Par a), $f(x) = f(0) + \int_0^1 0 = f(0)$.

Réciproquement, toute fonction $f$ constante convient. Les solutions sont donc les solutions constantes.

c) Supposons $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Par a), les $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ sont constantes. Donc il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall x$, $\operatorname{grad} f(x) = v$.

Donc $f(x) = f(0) + \int_0^1 v \cdot x\, dt = f(0) + v \cdot x$.

Réciproquement, toute fonction affine $f : x \longmapsto v \cdot x + b$ convient, puisque $\operatorname{grad} f(x) = v$ constante.

**2)** Les applications $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ sont nulles ssi les $f_i$ sont constantes, c'est-à-dire ssi $f$ est constante.

Les applications $\dfrac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}$ sont nulles ssi $f$ est affine (c'est-à-dire $f(x) = Ax + b$, où $A$ matrice constante).

*Remarque* : Fixons $x$ et posons $\forall t \in [0,1]$, $\varphi(t) = f(tx)$, on a $\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\, dt$.

Si on suppose toutes les dérivées partielles de $f$ d'ordre 2 nulles, on a $\varphi''(t) = 0$.

Donc $\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0)$, c'est-à-dire $f(x) = f(0) + df(0) \cdot x$. Donc $f$ est affine.

**3)** Par hypothèse, on a $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = -\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ pour tous $(i,j)$ et pour tout $x$.

Donc $\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j}(x) = -\dfrac{\partial^2 f_j}{\partial x_k \partial x_i}(x)$ pour tous $(i,j,k)$ et pour tout $x$.

On en déduit (avec Schwarz) que $\dfrac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(x) = -\dfrac{\partial^2 f_j}{\partial x_i \partial x_k}(x) = \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(x) = -\dfrac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}$. Donc $\dfrac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(x) = 0$.

Il résulte de 2) b) que $f$ est affine de la forme $f(x) = Ax + b$.

Comme $A = J(x)$, alors $A$ est par hypothèse une matrice antisymétrique.

La réciproque est vraie, puisque si $f(x) = Ax + b$, alors $J(x) = A$ pour tout $x$.

**4)** a) On a $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0$, car par le théorème de Schwarz $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$.

Donc $J(x)$ est symétrique.

b) On suppose $J(x)$ symétrique, c'est-à-dire $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$.

Considérons $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $U(x) = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 f_i(tx)\, dt$. Il s'agit de prouver que $\forall j$ que $f_j(x) = \dfrac{\partial U}{\partial x_j}(x)$.

On a $\dfrac{\partial U}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 f_j(tx)\, dt + \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 t\, \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(tx)\, dt$.

En effet, la dérivée de $x_j \longmapsto f_i(tx) = f_i(tx_1, ..., tx_n)$ est $t\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(tx_1, ..., tx_n)$.

Et on utilise la dérivée des intégrales à paramètre (dérivation sous la signe $\int$).

On obtient donc $\dfrac{\partial U}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 f_j(tx)\, dt + x_i \sum_{i=1}^n \int_0^1 t\, \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(tx)\, dt = \int_0^1 f_j(tx)\, dt + \int_0^1 \sum_{i=1}^n t\, x_i\, \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(tx)\, dt$.

On reconnaît dans le terme $\sum_{i=1}^n x_i\, \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(tx)$ la dérivée $\varphi'(t)$ de l'application $\varphi(t) = f_j(tx)$.

On obtient donc $\dfrac{\partial U}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 \varphi(t)\, dt + \int_0^1 t\varphi'(t)\, dt = [t\varphi(t)]_0^1 = \varphi(1) = f_j(x)$.