Opus n°16. Théorème de Poincaré (inspiré concours PC* 2013).

On note $\cdot$ le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$.

1) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ x \longmapsto f(x)$, où $x = (x_1, ..., x_n)$. On suppose f de classe C^1.

a) Montrer que $f(x) = f(0) + \int_0^1 \operatorname{grad} f(tx) \cdot x\, dt$.

b) Déterminer les fonctions f vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 0$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

c) On suppose f de classe C^2.

Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = 0$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ et $x \in \mathbb{R}^n$ ssi il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = v \cdot x + b$$

2) On suppose désormais $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\ x \longmapsto (f_1(x), ..., f_n(x))$ de classe C^1.

On note $J(x) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n}$ la matrice jacobienne et $df(x) : h \longmapsto J(x)h$ la différentielle de f en x.

Donner les énoncés équivalents aux propriétés 1) a), b) et c).

3) ($\bigstar$) On reprend les notations de b) et on suppose désormais f de classe C^2.

a) On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la matrice $J(x)$ est antisymétrique.

Montrer que $\forall (i, j, k)$, $\dfrac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(x) = 0$, et en déduire qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et $b \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$f(x) = Ax + b$$

La réciproque est-elle vraie ?

4) a) On suppose qu'il existe $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f_i(x) = \dfrac{\partial U}{\partial x_i}(x)$, c'est-à-dire

$$f(x) = \operatorname{grad} U(x)$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,$J(x)$ est symétrique.

b) On souhaite prouver la réciproque de a), appelé théorème de Poincaré.

On suppose donc que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la matrice $J(x)$ est symétrique.

Montrer qu'il existe une fonction $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(x) = \operatorname{grad} U(x)$

Indication : Considérer $U(x) = \int_0^1 f(tx) \cdot x\, dt = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 f_i(tx)\, dt$.

Remarque : Ainsi, le champ vectoriel f dérive d'un potentiel ssi $\forall (i, j)$, $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$, c'est-à-dire de rotationnel nul.