Opus n^{o}15. Corrigé

Partie I. Relations de comparaison dans les séries entières

1) Il existe $L = \lim_{x\to 1} g(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ car g rest croissante sur $[0, R[$.

Pour $p \in \mathbb{N}$, on a $g(x) \geq \sum_{n=0}^{p} b_n x^n$, donc $L \geq \sum_{n=0}^{p} b_n$ par passage à la limite des inégalités.

Comme p est arbitraire et que $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty$, alors $L = +\infty$.

2) a) On a $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n| \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n| + \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \varepsilon b_n x^n \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n| + \varepsilon g(x)$, car $b_n \geq 0$.

b) soit $\varepsilon > 0$. Il existe N vérifiant a). Donc $|f(x)| \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n| + \varepsilon g(x)$.

Comme $\lim_{x\to 1, x<1} g(x) = +\infty$, alors il existe $\alpha < 1$ tel que $\sum_{n=0}^{N} |a_n| \leq \varepsilon g(x)$ pour $x \in [\alpha, 1[$.

Donc $\forall x \in x \in [\alpha, 1[$, $|f(x)| \leq 2\varepsilon g(x)$. Comme ε est arbitraire, $f(x) = \mathfrak{o}_{x=1}\left(g(x)\right)$.

c) On a $(a_n - b_n) = \mathfrak{o}\left(b_n\right)$, donc par b), $f(x) - g(x) = \mathfrak{o}_{x=1}\left(g(x)\right)$ c'est-à-dire $f(x) \sim_{x=1} g(x)$.

3) On prend $b_n = 1$. Les hypothèses requises sont vérifiées.

On a $a_n - L = \mathfrak{o}\left(1\right)$, on obtient donc par 2) b), $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - L)x^n = \mathfrak{o}_{x=1}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$.

On obtient donc $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \dfrac{L}{1-x} + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$.

4) a) Comme $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = \dfrac{\ln n + \mathfrak{o}\left(1\right)}{\ln n} \to 1$, alors $R = 1$ par le critère de d'Alembert.

b) On a $\forall x \in [0, 1[$, $-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n} x^n$ et $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Comme ces séries sont absolument convergentes, on a par le produit de Cauchy, $a_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

c) Comme $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante, alors $\int_1^{n+1} \dfrac{1}{t}\, dt \leq \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \leq 1 + \int_1^{n} \dfrac{1}{t}\, dt$, donc $0 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right) - \ln n \leq 1$.

A fortiori, $A_n \sim \ln n$. Comme $\sum \ln n = +\infty$, on peut appliquer le problème I.

Donc $f(x) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n = \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

Partie II. Théorème d'Abel

A.1) On suppose que $\sum |a_n|$ converge. Alors la série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[0, 1]$.

Par le théorème d'interversion des limites, on a f définie et continue sur $[0, 1]$.

A.2) a) $A_n = O(1)$, donc le rayon de convergence de $\sum A_n x^n$ est ≥ 1.

On peut considérer $\sum A_n x^n$ comme le produit de Cauchy de $\sum x^n$ et de $\sum a_n x^n$.

Les rayons de convergence des séries entières $\sum x^n$ et de $\sum a_n x^n$ valent 1.

Donc le rayon de convergence de $\sum A_n x^n$ est ≥ 1, et $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \dfrac{f(x)}{1-x}$.

b) On a $A_n = \lambda + \mathfrak{o}\left(1\right)$, donc par la question 3) du problème I que

Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n = \dfrac{\lambda}{1-x} + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ lorsque $x \to 1^-$.

Par a), on en conclut $f(x) = \lambda + \mathfrak{o}\left(1\right)$ lorsque $x \to 1^-$, d'où le résultat.

B.1) La relation est immédiate pour $x = 1$, car $\sum_{k=n}^{+\infty} a_k = R_{n-1}$

Soient $x \in [0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$.

On a $\forall p \geq n$, $\sum_{k=n+1}^{p} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{p} (R_{k-1} - R_k)x^k = \sum_{k=n+1}^{p-1} R_k(x^{k+1} - x^k) + R_n x^{n+1} - R_p x^p$.

On a $\lim_{p\to+\infty} R_p = 0$ (comme reste), donc a fortiori $\lim_{p\to+\infty} R_p x^p = 0$.

En faisant tendre p vers $+\infty$, les séries convergent et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k(x^{k+1} - x^k) + R_n x^{n+1}$.

Remarque :

$\sum R_k(x^{k+1} - x^k)$ cv absolument, car $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée, et pour $x \in [0,1[$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \left|x^{k+1} - x^k\right| = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k - x^{k+1} = 1$.

B.2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $M_n = \sup_{k\geq n} |R_k|$. Pour $x = 1$, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\right| = |R_n| \leq M_n$.

Pour $x \in [0,1[$, on a $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\right| \leq M_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left|x^{k+1} - x^k\right| + M_n x^{n+1} = M_n(x^{n+1} + x^{n+1}) = 2M_n$.

B.3) On a donc $\sup_{x\in[0,1]} \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\right| \leq 2\sup_{k\geq n} |R_k| . \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Donc $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Donc $x \longmapsto \sum a_n x^n$ est continue sur $[0,1]$, et ainsi on retrouve $\lim_{x\to 1} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

C. On applique ce qui précède à $f(x) = g\,(Rx) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, avec $a_n = b_n R^n$.

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est bien de rayon de convergence 1.

D. On prend $\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$.

$f(x)$ converge vers $\frac{1}{2}$ lorsque x tedn vers 1^-, mais la série $\sum(-1)^n$ diverge.