Opus n°15. Théorème d'Abel

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon $\boxed{R=1}$. Pour $x \in [0,1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Partie I. Relations de comparaison dans les séries entières

Soit $\sum b_n x^n$ une série entière à coefficients réels *positifs*, de rayon de convergence $R=1$.

Pour $x \in [0,1[$, on pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. On suppose de plus que $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty}$.

1) Montrer que $\lim_{x\to 1, x<1} g(x) = +\infty$. *Indication* : Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to 1} g(x) \geq \sum_{n=0}^{p} b_n$.

2) a) Soit $\varepsilon > 0$. On suppose qu'il existe N tel que $\forall n > N$, $|a_n| \leq \varepsilon b_n$.

Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right| \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n| + \varepsilon g(x)$.

b) On suppose $a_n = \mathfrak{o}\,(b_n)$. Montrer que lorsque x tend vers 1^-, $f(x) = \mathfrak{o}\,(g(x))$.

c) On suppose $a_n \sim b_n$. Montrer que lorsque x tend vers 1^-, $f(x) \sim g(x)$.

3) *Exemple. On suppose* $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$.

Montrer que lorsque x tend vers 1^-, $f(x) = \dfrac{L}{1-x} + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$.

4) *Exemple.*

a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum (\ln n) x^n$.

b) On pose $A_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. Montrer que $\forall x \in [0,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n = \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

c) On pose $\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n) x^n$. Montrer que $f(x) \sim \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}$ quand x tend vers 1^-.

Partie II. Théorème d'Abel

On suppose que la série $\sum a_n$ converge.

On pose $\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

A.1) On suppose dans cette question que $\sum a_n$ est absolument convergente.

Montrer que $\lim_{x\to 1, x<1} f(x) = \lambda$.

A.2) On suppose dans cette question que $\sum a_n$ est semi-convergente.

a) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, $\sum A_n x^n$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n = \dfrac{f(x)}{1-x}$.

b) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n = \dfrac{\lambda}{1-x} + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ lorsque $x \to 1^-$.

En déduire le théorème d'Abel : $\lim_{x\to 1, x<1} f(x) = \lambda$.

B.1) Montrer que $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k (x^{k+1} - x^k) + R_n x^{n+1}$.

B.2) En déduire que $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\right| \leq 2 \sup_{k\geq n} |R_k|$.

B.3) En déduire que $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$, et une nouvelle preuve de A.2) b).

C. Soit $\sum b_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R, où $0 < R < +\infty$.

Pour $x \in [0, R[$, on pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

Montrer que si $\sum b_n R^n$ converge, alors $g(x)$ converge vers $\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n R^n$ lorsque x converge vers R^-.

D. Donner un exemple montrant que la réciproque est fausse.

Remarque cuturelle : Le théorème de Tauber assure que la réciproque est vraie lorsque $a_n = O(\frac{1}{n})$.