Opus n°14. Fonction caractéristique d'une variable aléatoire et théorème de Lévy

Dans ce sujet, les variables aléatoires considérées sont des variables aléatoires X à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On considère alors sa série génératrice G_X par $G_X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$, où $a_k = P(X = k)$.

On définit sa fonction caractéristique $\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = G_X(e^{it}) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{ikt}$.

1) a) Montrer que $\phi_X(t) = E(e^{itX})$.

b) On considère une variable aléatoire Y de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Autrement dit, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(Y = n) = pq^n$, où $q = 1 - p$. On a ainsi $G_Y(z) = \dfrac{p}{1 - qz}$.

Expliciter sans justification les fonctions caractéristiques de Y et de $Z = Y + 1$.

2) a) Montrer que ϕ_X est continue sur $\mathbb{R}$.

b) On suppose X d'espérance finie, c'est-à-dire $E(|X|) < +\infty$, ce qui équivaut ici à $E(X) < +\infty$.

Montrer que ϕ_X est dérivable en 0 et exprimer $\phi_X'(0)$ en fonction de $E(X)$.

3) On rappelle que $\phi_X(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m e^{imt}$. On rappelle que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\int_0^{2\pi} e^{ikt}\, dt = 0$ si $k \neq 0$, et 2π si $k = 0$.

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $a_k = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_X(t) e^{-ikt}\, dt$.

4) Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $\phi_X = \phi_Y$.

Montrer que X et Y ont même loi, c'est-à-dire que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = P(Y = k)$.

5) *Théorème de Lévy.* On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On note U le cercle unité de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes de module 1.

On suppose que pour tout $z \in U$, $\lim_{n\to+\infty} G_{X_n}(z) = G_Y(z)$, où Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Montrer que la loi de X_n converge vers la loi de Y, c'est-à-dire que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(Y = k)$.

Remarque : On utilisera pour la preuve un théorème judicieusement choisi et vu il y a quelque temps déjà ...

6) *Théorème des événements rares*

Soit $\lambda > 0$. On suppose *connue* la propriété suivante : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{z}{n} + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n = e^z$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $S_n = X_{1,n} + X_{2,n} ... + X_{n,n}$ une somme de n variables indépendantes et de même loi.

Dans chacun des trois cas suivants, expliciter sans justification la série génératrice $G_{S_n}(z)$ de S_n , et montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to+\infty} P(S_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

a) Pour tout n assez grand, les $X_{i,n}$ suivent la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}$.

b) Pour tout n, les $X_{i,n}$ suivent la loi de Poisson de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}$.

c) Pour n assez grand, les $X_{i,n}$ suivent la loi géométrique de paramètre $\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)$: $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X_{i,n} \geq k) = \left(\dfrac{\lambda}{n}\right)^k$.