Opus n°14 bis. Corrigé

1) a) $|xP(X=x\mid B)| = \dfrac{|x|\,P(X=x\mid B)}{P(B)} \leq \dfrac{|x|\,P(X=x)}{P(B)}$.

Or, $E(|X|) = \sum_{x\in E} |x|\,P(X=x) < +\infty$. D'où $\sum_{x\in E} |x|\,P(X=x\mid B) \leq \dfrac{E(|X|)}{P(B)}$.

b) Par définition $E(X) = \sum_{x\in E} xP(X=x)$.

Par la formule des probabilités totales, on a $P(X=x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(X=x\mid B_n)P(B_n)$.

Donc $E(X) = \sum_{x\in E}\sum_{n\in\mathbb{N}} xP(X=x\mid B_n)P(B_n)$.

La famille double associée est sommable, car la somme des valeurs absolues vaut $E(|X|)$.

Par Fubini, on a donc $E(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{x\in E} xP(X=x\mid B_n)\right) P(B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} E(X\mid B_n)P(B_n)$.

2) $E(f(X)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} E(f(X)\mid B_n)P(B_n)$. Mais ici, $E(f(X)\mid B_n) = f(x_n)$, car $f(X)$ est constante sur B_n.

3) a) $P(N\geq n\mid X_1=0) = P(X_1 = X_2 = ... = X_{n+1} = 0\mid X_1 = 0) = P(X_2 = ... = X_n = X_{n+1} = 0) = q^n$.

Ainsi, la loi de N sachant $X_1 = 0$ est la loi géométrique de paramètre p. Et $E(N\mid X_1=0) = \dfrac{1}{p}$.

On a de même $E(N\mid X_1 = 1) = \dfrac{1}{q}$. Par la formule des espérances conditionnelles :

$E(N) = E(N\mid X_1=0)P(X_1=0) + E(N\mid X_1=1)P(X_1=1) = \dfrac{1}{p}\,q + \dfrac{1}{q}\,p = \dfrac{q}{p} + \dfrac{p}{q}$.

Remarque : Avec $t = \dfrac{p}{q}$, on a $t + \dfrac{1}{t} \geq 2$, donc on a bien toujours $E(N)\geq 2$.

4) a) On a par 1), $G_Y(t) = E(t^Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} E(t^Y\mid N=n)\ P(N=n)$.

Or, on a $E(t^Y\mid N=n) = E(t^{X_1+\dots+X_n}) = G_X(t)^n$.

Donc $G_Y(t) = E(t^Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} G_X(t)^n\ P(N=n) = G_N(G_X(t))$.

b) Comme N et X sont d'espérances finies, on a : $E(N) = G'_N(1)$ et $E(X) = G'_X(1)$.

Donc G_Y est dérivable en 1, et $E(Y) = G'_Y(1) = G'_N(G_X(1))G'_X(1) = G'_N(1)G'_X(1) = E(N)E(X)$.

c) On a $N_{n+1} = \sum_{i=1}^{N_n} 2.1_{A_i}$, où A_i : La i-ième cellule se divise.

Les variables 2.1_{A_i} ont pour série génératrice $G_X(t) = q + pt^2$. Donc $G_{n+1}(t) = G_n(q+pt^2)$.

On a ici $E(X) = 2p$, donc $E(N_n) = (2p)^n$. D'où la CNS : $\lim_{n\to+\infty} E(N_n) = +\infty$ ssi $p \geq \dfrac{1}{2}$.

5) On a $N_{k+1} = N_k + 1_C$, où C est l'événement $X_{k+1}\notin A_k$.

Or, $P(C) = \left(1 - \dfrac{\operatorname{card} A_k}{n}\right)$, donc $E(N_{k+1}\mid N_k = j) = j + \left(1 - \dfrac{j}{n}\right) = 1 + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) j$.

Donc $E(N_{k+1}) = \sum_j P(B_j)\ E(N_{k+1}\mid N_k = j) = \sum_j P(N_k = j) + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\sum_j jP(N_k=j)$.

On en déduit $E(N_{k+1}) = 1 + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) E(N_k)$.

L'homothétie $z \longmapsto 1 + (1-\frac{1}{n})z$ admet $z = n$ comme point fixe.

Donc $E(N_{k+1}) - n = (1-\frac{1}{n})(E(N_k) - n)$, et on obtient ainsi $E(N_k) = n\left(1 - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^k\right)$.