Opus n°14 bis. Espérance conditionnelle et formule de Wald

1) Formule des espérances conditionnelles

Soit $X : \Omega \to E \subset \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle d'espérance finie.

Soit $(B)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements, c'est-à-dire $\Omega = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, avec $P(B_n) > 0$.

a) Soit un événement B tel que $P(B) > 0$. Justifier que $\sum_{x\in E} |xP(X = x \mid B)| \leq \dfrac{E(|X|)}{P(B)}$.

Remarque : En particulier, la famille $(xP(X = x \mid B))_{x\in E}$ est sommable.

On définit alors " l'espérance de X conditionnée par B " par

$$E(X \mid B) = \sum_{x\in E} xP(X = x \mid B)$$

b) Montrer que

$$\boxed{E(X) = \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} E(X \mid B_n)P(B_n)}$$

2) Formule du transfert

Soit $f : E \to \mathbb{R}$. On suppose $f(X)$ d'espérance finie. En considérant $B_n : (X = x)$, retrouver :

$$E(f(X)) = \sum_{x\in E} f(x)\ P(X = x)$$

3) Longueur de la première et deuxème séquence de tirages consécutifs égaux

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. de Bernoulli i.i.d. de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.

On définit N et M les longueurs des séquences de 0 ou de 1 consécutives (ce sont donc des entiers de $\mathbb{N}^*$).

Par exemple, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (0, 0, 0, 1, 1, 0, ...)$, alors $N = 3$ et $M = 2$.

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, donner $P(N > n \mid X_1 = 0)$. Que dire de la loi de N sachant $X_1 = 1$?

b) En déduire $E(N \mid X_1 = 0)$, et en conclure $E(N) = \dfrac{q}{p} + \dfrac{p}{q} \geq 2$.

Remarque : On montre de même $E(M \mid X_1 = 0) = \dfrac{1}{q}$. D'où $E(N) = \dfrac{q}{q} + \dfrac{p}{p} = 2$.

4) Formule de Wald

On considère une suite de variables aléatoires entières mutuellement indépendantes N, X_1, ... ,X_n, ... définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

On note Y la variable aléatoire définie par $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$, c'est-à-dire $\forall\omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$.

a) On pose $\forall t \in [0, 1]$, $G_Y(t) = E(t^Y)$. En utilisant 1), montrer que $G_Y(t) = G_N(G_X(t))$.

b) On suppose N et X d'espérance finies. Montrer que Y est d'espérance finie, et que $E(Y) = E(N)E(X)$.

c) (*Oral Centrale 2022*) On considère 1 cellule. A chaque étape, chaque cellule soit se divise en deux cellules (avec une probabilité p) soit meurt. On note N_n le nombre de cellules après n divisions.

On note G_n la série génératrice de N_n. Justifier que $\forall t \in [0, 1]$, $G_{n+1}(t) = G_n(q + pt^2)$.

Donner une CNS sur p pour que $\lim_{n\to+\infty} E(N_n) = +\infty$.

5) Exemple : Cardinal d'un ensemble obtenu par ajouts successifs aléatoires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $E = \{1, 2, ..., n\}$. Soit une suite de v.a. $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ i.i.d. de loi uniforme sur E.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère $A_k = \{X_1, X_2, ..., X_k\} \subset E$ et on pose $N_k = \mathrm{card}(A_k)$. On a ainsi $N_k \leq \min(k, n)$.

En utilisant les événements $B_j : (N_k = j)$, montrer que $E(N_{k+1}) = 1 + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) E(N_k)$. En déduire $E(N_k)$.