Opus n°13. Corrigé

Exercice A. Matrices stochastiques et modèle d'Ehrenfest

1) a) Soient A et B deux matrices stochastique. Posons $C = AB$.

On a $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \geq 0$ et $C\Omega = A(B\Omega) = A\Omega = \Omega$. Donc C est bien stochastique.

b) La matrice $A^0 = I_n$ est stochastique. On conclut par récurrence immédiate sur k, en utilisant a) et $A^{k+1} = A^k A$.

2) a) Soit $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ un vecteur propre de A de valeur propre λ.

On a donc $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda x_i$.

Considérons p tel que $|x_p| = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$. Comme X n'est pas nul, alors $|x_p| > 0$.

On a donc $|\lambda| |x_p| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{pj}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{pj} |x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{pj} |x_p| = |x_p|$. Comme $|x_p| > 0$, alors $|\lambda| \leq 1$.

b) On reprend les notations précédentes. On a $(\lambda - a_{pp})x_p = \sum_{j\neq p} a_{pj}x_j$.

On reprend les notations précédentes. On a donc $|\lambda - a_{pp}| \leq \sum_{j\neq p} a_{pj} \dfrac{|x_j|}{|x_p|} \leq \sum_{j\neq p} a_{pj}$.

Si $|\lambda - a_{pp}| < \sum_{j\neq p} a_{pj}$, alors $|\lambda| < a_{pp} + \sum_{j\neq p} a_{pj} = \sum_{j=1}^{n} a_{pj} = 1$, donc $|\lambda| < 1$.

Supposons $|\lambda| = 1$. On a alors nécessairement $|\lambda - a_{pp}| = |\lambda| - a_{pp}$, donc λ réel positif. Donc $\lambda = 1$.

Remarque : Géométriquement, λ appartient au cercle de centre a_{pp} et de rayon $(1 - a_{pp})$, qui est inclus dans le disque unité, et ne rencontre le cercle unité qu'en le point 1.

3) a) On a $\forall i \in \{1, ..., M-1\}$, $P(N_{k+1} = i) = \sum_{j=0}^{M} P(N_{k+1} = i \mid N_k = j)P(N_k = j)$.

Or, $P(N_{k+1} = i \mid N_k = j) = \dfrac{1}{2}$ si $j = i$, $\dfrac{1}{2}\dfrac{(i+1)}{M}$ si $j = i+1$ et $i < M$, $\dfrac{1}{2}\dfrac{M-(i-1)}{M}$ si $j = i-1$ et $i > 0$.

Enfin, $P(N_{k+1} = i \mid N_k = j) = 0$ si $j \notin \{i-1, i, i+1\}$.

b) On a $E(N_{k+1}) = \sum_{i=0}^{M} iP(N_{k+1} = i) =$

$= \dfrac{1}{2}\sum_{i=0}^{M} iP(N_k = i) + \dfrac{1}{2}\sum_{i=0}^{M-1} \dfrac{i(i+1)}{M} P(N_k = i+1) + \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{M} \dfrac{1}{2}\dfrac{i(M-(i-1))}{M} P(N_k = i-1)$

$= \dfrac{1}{2}\sum_{i=0}^{M} iP(N_k = i) + \dfrac{1}{2}\sum_{i=0}^{M} \dfrac{i(i-1)}{M} P(N_k = i) + \dfrac{1}{2}\sum_{i=0}^{M} \dfrac{(i+1)(M-i)}{M} P(N_k = i)$

$= \dfrac{1}{2}\sum_{i=0}^{M} P(N_k = i)\left(i + \dfrac{i(i-1)}{M} + \dfrac{(i+1)(M-i)}{M}\right) = \sum_{i=0}^{M} P(N_k = i)\left(\left(1 - \dfrac{1}{M}\right)i + \dfrac{1}{2}\right)$.

On en déduit que $E(N_{k+1}) = \left(1 - \dfrac{1}{M}\right)E(N_k) + \dfrac{1}{2}$.

L'application $z \longmapsto \left(1 - \dfrac{1}{M}\right)z + \dfrac{1}{2}$ est l'homothétie de centre $\dfrac{M}{2}$ et de rapport $\left(1 - \dfrac{1}{M}\right)$, lequel $\in [0, 1[$.

Donc $\lim_{k\to+\infty} E(N_k) = \dfrac{M}{2}$.

c) Comme B et $A = {}^tB$ ont même polynôme caractéristique et que A est stochastique à diagonale strictement positive, les valeurs propres de B sont de module ≤ 1, et 1 est la seule valeur propre de module 1.

On admet que le polynôme caractéristique de B est scindé à racines simples, donc B est diagonalisable et les sev propres sont des droites vectorielles. De plus, toute droite rencontre Δ en au plus un point. Donc il existe au plus un vecteur $Z \in \Delta$ invariant par B. Or, avec $z_i = 2^{-M}\binom{M}{i}$, on a bien $z_i = \frac{1}{2}z_i + z_{i-1} \times \frac{M-i+1}{2M} + z_{i+1} \times \frac{i+1}{2M}$ et $\sum_{i=0}^{M} z_i = 1$.

En effet, on a d'une part $\binom{M}{i-1}\frac{M-i+1}{M} + \binom{M}{i-1}\frac{i+1}{M} = \binom{M-1}{i-1} + \binom{M-1}{i} = \binom{M}{i}$ et d'autre part $\sum_{i=0}^{M} \binom{M}{i} = 2^M$.

D'où l'existence et l'unicité de Z.

d) On considère une base $(Z, Z_1, ..., Z_M)$ composée de vecteurs propres de B.

On considère $X_0 = \alpha_0 Z + \sum_{i=1}^{M} \alpha_i Z_i$. Donc $X_k = B^k X_0 = \alpha_0 Z + \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \lambda_i^k Z_i$.

Comme tous les λ_i, avec $1 \le i \le M$, sont de module < 1, on a $\lim_{k\to+\infty} (\lambda_i)^k = 0$. Donc $\lim_{k\to+\infty} X_k = \alpha_0 Z$.

De plus, la somme des coefficients des X_k est constante de valeur 1 (il s'agit de probabilités). Donc il en est de même de $\lim_{k\to+\infty} X_k$, donc $\alpha_0 = 1$ (car $Z \in \Delta$).

Exercice B. Polynômes de Bernstein et théorème de Stone-Weierstrass

1) a) En effet, $Y = Y.1_{Y\le\varepsilon} + Y.1_{Y>\varepsilon}$, donc $E(Y) \le \varepsilon P(Y \le \varepsilon) + P(Y > \varepsilon)\sup(Y) \le \varepsilon + P(Y > \varepsilon)\sup(Y)$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en μ, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|x - \mu| \le \alpha \Rightarrow |f(x) - f(\mu)| \le \varepsilon$.
Donc $P(|X_n - \mu| \le \alpha) \le P(|f(X_n) - f(\mu)| \le \varepsilon)$.
Et $P(|f(X_n) - f(\mu)| > \varepsilon) \le P(|X_n - \mu| > \alpha) \to 0$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Ainsi, en posant $|f(X_n) - f(\mu)|$, on a donc $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} P(Y_n > \varepsilon) = 0$.

Posons $M = \sup|f|$. Par a), on a : $E(Y_n) \le \varepsilon + 2M\ P(Y_n > \varepsilon)$.

Or, on sait que $\lim_{n\to+\infty} P(Y_n > \varepsilon) = 0$. Donc $E(Y_n) \le 2\varepsilon$ pour n assez grand.
On en déduit $\lim_{n\to+\infty} E(Y_n) = 0$.

Comme $|E(f(X_n) - f(\mu))| \le E(Y_n)$, alors $\lim_{n\to+\infty} E(f(X_n) = E(f(\mu)) = f(\mu)$.

2) On a $X_n = \dfrac{1}{n} S_n$, où S_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,t)$ à valeurs dans $[\![0,n]\!]$.
Donc $E(X_n) = \dfrac{1}{n}E(S_n) = t$ et $V(S_n) = \dfrac{1}{n^2}V(S_n) = \dfrac{nt(1-t)}{n^2} = \dfrac{t(1-t)}{n}$.
a) Par Bienaymé-Tchebychev, on a donc $P(|X_n - t| > \alpha) \le \dfrac{t(1-t)}{n\sigma^2}$.

b) On a $P_n(t) = E(f(X_n))$.
La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers la fonction constante t.

L'application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue et bornée sur le segment $[0,1]$.
On peut donc appliquer 1). On a ainsi $\lim_{n\to+\infty} E(f(X_n)) = f(t)$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} P_n(t) = f(t)$.

3) a) $|E(f(X_n)) - f(t)| = |E(f(X_n) - f(t)))| \le E(|f(X_n) - f(t)|) \le E(L\,|X_n - t|) \le L\ E(|X_n - t|)$.
Par Cauchy-Schwarz, $E(|X_n - t|) \le \sqrt{V(X_n)} = \sqrt{\dfrac{t(1-t)}{n}} \le \dfrac{1}{\sqrt{4n}}$, car $\forall t \in [0,1]$, $t(1-t) \le \dfrac{1}{4}$.

b) On a $P_n(t) - f(t) = E(f(X_n)) - f(t)$, donc par a), $\sup_{t\in[0,1]} |P_n(t) - f(t)| \le \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

4) On considère $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = g(a + t(b-a))$.
Par 3), il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que $\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - P_n(t)| = 0$.
On considère alors $Q_n(x) = P_n(\frac{x-a}{b-a})$, c'est-à-dire $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g(a + \frac{k}{n}(b-a))\binom{n}{k}(\frac{x-a}{b-a})^k(\frac{b-x}{b-a})^{n-k}$.

On a $P_n(t) = Q_n(a + t(b-a))$. On conclut avec $\sup_{t\in[0,1]} |f(t) - P_n(t)| = \sup_{x\in[a,b]} |g(x) - Q_n(x)|$.