Opus n°13. Probabilités

Exercice A. Matrices stochastiques et modèle d'Ehrenfest

On note Δ l'ensemble des vecteurs $X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. On note $\Omega = (1, 1, ..., 1)$.

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **stochastique** ssi $\begin{cases} \text{les coefficients sont positifs, c'est-à-dire } \forall (i,j),\ a_{ij} \geq 0 \\ A\Omega = \Omega, \text{ c'est-à-dire ssi } \forall i,\ \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1. \end{cases}$

1) a) Montrer que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, un produit de deux matrices stochastiques est stochastique.

b) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique, il en est de même des puissances A^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2) a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique.

Montrer que toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A est de module ≤ 1, c'est-à-dire vérifie $|\lambda| \leq 1$.

Indication : Considérer X vecteur propre non nul, et la p-ième ligne de $AX = \lambda X$, où $|x_p| = \max_{1 \leq i \leq p}(|x_i|)$.

b) On suppose de plus $a_{ii} > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Montrer que 1 est la seule valeur propre de A de module 1.

Indication : Considérer à nouveau p tel que $|x_p| = \max_{1 \leq i \leq p}(|x_i|)$. Et justifier que $|\lambda - a_{pp}| \leq \sum_{j \neq p} a_{pj}$.

3) *Modèle d'Ehrenfest* : Il s'agit d'un modèle utilisé dans l'étude des mouvements des molécules :

On suppose que M molécules sont contenues dans deux urnes.

On note N_0 la variable aléatoire donnant le nombre de molécules contenues dans la première urne.

A chaque unité de temps, UNE molécule est choisie au hasard et elle est changée d'urne avec une probabilité $\frac{1}{2}$.

On désigne par N_k le nombre de molécules contenues dans la première urne après k unités de temps.

On considère $X_k = (P(N_k = i))_{0 \leq i \leq M}$ le vecteur de $\mathbb{R}^{M+1}$ donnant la loi de N_k.

On considérera la matrice $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2M} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{M}{2M} & \frac{1}{2} & \frac{2}{2M} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M-1}{2M} & \frac{1}{2} & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \frac{1}{2} & \frac{M}{2M} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2M} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ d'ordre $M+1$.

a) Exprimer, en justifiant votre réponse, $P(N_{k+1} = i)$ en fonction des $P(N_k = j)$. On en déduit $X_{k+1} = BX_k$.

b) Montrer que $E(N_{k+1}) = \dfrac{1}{2} + \left(1 - \dfrac{1}{M}\right) E(N_k)$. En déduire la limite de $E(N_k)$ lorsque k tend vers $+\infty$.

c) La matrice B^T est une matrice stochastique et vérifie les propriétés du 2).

On admet pour la suite que le polynôme caractéristique de B est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$.

On considère le vecteur Z défini par $\forall i \in \{0, 1, ..., M\}$, $z_i = 2^{-M}\binom{M}{i}$.

Justifier que Z est l'unique vecteur appartenant à Δ et vérifiant $BZ = Z$.

d) Montrer que, quelle que soit la valeur de X_0, on a : $\lim_{k \to +\infty} X_k = Z$. Retrouver le résultat du b).

Exercice B. Polynômes de Bernstein et théorème de Stone-Weierstrass

1) a) Soit $Y : \Omega \to \mathbb{R}^+$ une v.a. bornée à valeurs positives. Montrer que $E(Y) \leq \varepsilon + P(Y > \varepsilon)\sup(Y)$.

b) Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et *bornée*. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires sur Ω à valeurs dans I convergeant en probabilité vers la fonction constante μ, c'est-à-dire

$$\forall \alpha > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} P(|X_n - \mu| > \alpha) = 0$$

Montrer que $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers la fonction constante $f(\mu)$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \ \lim_{n\to+\infty} P(|f(X_n) - f(\mu)| > \varepsilon) = 0$$

Et déduire de a) que $\lim_{n\to+\infty} E(f(X_n)) = f(\mu)$.

Indication : Appliquer a) à $Y_n = |f(X_n) - f(\mu)|$. Noter que $\sup(Y_n) \leq 2\sup|f|$ et que $\lim_{n\to+\infty} P(Y_n > \varepsilon) = 0$.

Dans la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une v.a. X_n à valeurs dans $[0,1]$ telle que

$$\forall k \in \{0,1,2,...,n\}, \ P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

Autrement dit, X_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,t)$ à valeurs dans $\left\{\frac{k}{n}, \ k \in \{0,1,2,...,n\}\right\}$.

On a ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n) = t$ et $V(X_n) = \dfrac{t(1-t)}{n}$.

On pose $P_n(t) = E(f(X_n)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

2) Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $t \in [0,1]$. On propose ici de prouver la convergence simple.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(|X_n - t| > \alpha) \leq \dfrac{t(1-t)}{\alpha^2 n}$. En particulier, on a : $\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - t| > \alpha) = 0$.

b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} P_n(t) = f(t)$.

3) On propose de prouver la convergence uniforme dans le cas où f est lipschitzienne de rapport L.

a) Montrer que $|E(f(X_n)) - f(t)| \leq L \ E(|X_n - t|) \leq L \ \sqrt{V(X_n)} \leq \dfrac{L}{\sqrt{4n}}$.

b) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in[0,1]} |P_n(t) - f(t)| = 0$.

4) Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ lipschitzienne de rapport M.

Montrer qu'il existe une suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynômes convergeant uniformément vers g sur $[a,b]$, c'est-à-dire telle que $\lim_{n\to+\infty} \sup_{u\in[a,b]} |Q_n(u) - g(u)| = 0$.

Indication :

Appliquer 3) à une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R} \ \ t \longmapsto g(\alpha + \beta t)$, où α et β sont judicieusement choisies.