Opus 12. Permutation de l'ordre des termes dans une série. Corrigé

Partie A.

1) a) $T_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, avec $a_k = \dfrac{1}{4k-3} + \dfrac{1}{4k-1} - \dfrac{1}{2k} = O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$, donc $\sum a_k$ converge, donc $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

b) $T_n - S_n = \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+3} + ... + \dfrac{1}{4n-1} = \sum_{k=n}^{2n-1} \dfrac{1}{2k+1}$.
Or, $\int_{n+1}^{2n+1} \dfrac{dt}{2t+1} \leq \sum_{k=n}^{2n-1} \dfrac{1}{2k+1} \leq \int_{n}^{2n} \dfrac{dt}{2t+1}$, d'où $\dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{4n+3}{2n+3}\right) \leq S_n - T_n \leq \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{4n+1}{2n+1}\right)$.

Donc $\lim_{n\to+\infty}(T_n - S_n) = \frac{1}{2}\ln 2$. On en déduit $\lim_{n\to+\infty} T_n = \frac{3}{2}\ln 2$.

2) a) $a_n = \frac{1}{2}u_n$ et $b_n = (u_{2n} - \frac{1}{2}u_n)$.

b) $S_n = b_n - a_n = (u_{2n} - \frac{1}{2}u_n) - \frac{1}{2}u_n = \ln(2n) + \gamma + \mathfrak{o}(1) - \ln n - \gamma + \mathfrak{o}(1) = \ln 2 + \mathfrak{o}(1)$.

c) $T_n = b_{2n} - a_n = (u_{4n} - \frac{1}{2}u_{2n}) - \frac{1}{2}u_n = \ln(4) - \frac{1}{2}\ln(2) + \mathfrak{o}(1) = \frac{3}{2}\ln(2) + \mathfrak{o}(1)$.

Partie B. Permutations de l'ordre des termes dans les séries

3) Soit $p \in \mathbb{N}$. Il s'agit de prouver que pour $n > n_0$ choisi assez grand, on a $\sigma(n) \geq p$.

Or, pour $n \notin \{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2), ..., \sigma^{-1}(p-1)\}$, on a $\sigma(n) \geq p$. Donc on peut prendre $n_0 = 1 + \max_{1\leq k<p} \sigma^{-1}(k)$.

4) a) Pour n assez grand, T_n contient tous les termes a_k, pour $1 \leq k \leq p$: cf l'argument utilisé au 3).

Les autres termes sont positifs, donc $T_n \geq S_p$ pour tout $n \geq \max_{1\leq k\leq n} \sigma^{-1}(k)$.

D'autre part, on a $T_n \leq S_m$, où $m = \max_{1\leq k\leq n} \sigma(k)$, donc $\leq L$, car L est la somme d'une série à termes positifs.

b) Pour un p assez grand, $S_p \geq L - \varepsilon$.

Par a), on a donc pour tout n assez grand, $T_n \geq S_p \geq L - \varepsilon$. Donc $\lim_{n\to+\infty} T_n = L$.

Variante : Il existe $L' = \lim_{n\to+\infty} T_n \leq L = \lim_{n\to+\infty} S_n$, car $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite croissante et majorée par L.

Par a), on a $T_n \geq S_p$ pour tout n assez grand, donc $L' \geq S_p$ par passage à la limite $n \to +\infty$.

Puis, en faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient $L' \geq L$. Donc $L = L'$.

5) Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour $n \geq n_0$ assez grand, T_n contient tous les termes a_k, pour $1 \leq k \leq p$.

Donc $\forall n \geq n_0$, $|T_n - S_p| \leq \sum_{k=p+1}^{+\infty} |a_k|$, en considérant les autres termes de T_n.

On en déduit que $|T_n - L| \leq 2\sum_{k=p+1}^{+\infty} |a_k|$.

Or, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver p tel que le reste $\sum_{k=p+1}^{+\infty} |a_k| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$, et donc $|T_n - L| \leq \varepsilon$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} T_n = L$.

Autre méthode : On écrit $a_n = a_n^+ - a_n^-$, où $a_n^+ = a_n$ si $a_n \geq 0$ et 0 sinon.

Les séries $\sum a_n^+$ et $\sum a_n^-$ sont absolument convergentes. On poeut donc leur appliquer 4).

Or, pour toute permutation σ, on a $\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}^+ - \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}^-$.

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}^+ = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+ = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Partie C

6) a) Supposons par l'absurde qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon(n) = +1$ pour tout $n \geq p$.

Alors $\lim_{n\to+\infty}(S_n - S_p) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=p+1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$, donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Pour n assez grand, on a $S_{n-1} > x$, donc $\varepsilon_n = -1$, d'où une contradiction.

Par un raisonnement analogue, la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être constante de valeur -1 à partir d'un certain rang.

b) Lorsque $\varepsilon_{n-1} = +1$ et $\varepsilon_n = -1$, alors on a $S_{n-1} \leq x \leq S_n$.

De même, lorsque $\varepsilon_{n-1} = -1$ et $\varepsilon_n = +1$, alors on a $S_n \leq x \leq S_{n-1}$.

On note J l'ensemble (infini) des entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = -1$.

Par convention, on considère que $0 \in J$.

Il résulte des inégalités précédentes que pour tout $n \in J$, $|S_n - x| \leq a_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe deux éléments consécutifs m et p de J tels que $n \in [m+1, p]$.

On a alors $|S_n - x| \leq \max(|S_p - x|\,, |S_m - x|) \leq \max(a_p, a_m)$.

Comme J est infini, m tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc par pincement, $\lim_{n\to+\infty} S_n = x$.

7) Il s'agit de choisir à chaque étape soit le premier terme $\frac{1}{2n-1}$ non encore sélectionné soit le premier terme $\frac{-1}{2n}$ non encore sélectionné.

A chaque étape, on prend un nouveau terme $\frac{1}{2n-1}$ lorsque $S_n \leq x$, et un nouveau terme $\frac{-1}{2n}$ sinon.

On vérifie de façon analogue au 6) que la série ainsi construite comprend *tous* les termes $\frac{(-1)^n}{n}$ et converge vers x.