Opus 12. Permutation de l'ordre des termes dans une série

Partie A. Un exemple de permutation dans une série semi-convergente

On pose $S_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n}$ (somme de la série harmonique alternée).
On rappelle que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln 2$ (preuve par l'inégalité de Taylor-Lagrange)

1) On pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{4k-3} + \dfrac{1}{4k-1} - \dfrac{1}{2k} \right) = 1 + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{4n-3} + \dfrac{1}{4n-1} - \dfrac{1}{2n}$....

a) Démontrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

b) Montrer que $T_n - S_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \dfrac{1}{2k+1}$. En déduire avec soin que $\lim_{n\to+\infty} T_n = \dfrac{3}{2}\ln 2$.

2) On pose $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{n}$, $A_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} + ... + \dfrac{1}{2n}$ et $B_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + ... + \dfrac{1}{2n-1}$.

On sait qu'il existe $\gamma = \lim_{n\to+\infty}(u_n - \ln n)$. On a ainsi $u_n = \ln n + \gamma + \mathfrak{o}(1)$.

a) Exprimer A_n et B_n en fonction de u_n et de u_{2n}.

b) Exprimer S_n en fonction de u_{2n} et de u_n. Retrouver ainsi la valeur de $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

c) En procédant de façon analogue, retrouver la valeur de $\lim_{n\to+\infty} T_n$.

Partie B. Permutations de l'ordre des termes dans les séries à termes positifs

3) Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijection. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \sigma(n) = +\infty$.

Indication : Soit $p \in \mathbb{N}$. Expliciter n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $\sigma(n) \geq p$. Utiliser les $\sigma^{-1}(k)$, avec $k < p$.

4) Soit $\sum a_n$ une série convergente à termes positifs. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $L = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

On considère une permutation σ de $\mathbb{N}$. On pose $T_n = \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}$.

a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $T_n \geq S_p$ pour n assez grand.

b) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$.

Ainsi, pour une série à termes positifs, la somme ne dépend pas de l'ordre dans lequel on énumère les éléments.

5) En adaptant la preuve précédente, montrer que pour toute série $\sum a_n$ absolument convergente, et pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum a_{\sigma(n)}$ converge et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Partie C. Permutations de l'ordre des termes dans les séries semi-convergentes (★)

6) a) Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle positive telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On construit par récurrence forte $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ défini de la façon suivante : On prend $\varepsilon_0 = 0$;

pour $n \in \mathbb{N}^*$, on compare x et $S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k a_k$: $\begin{cases} \text{si } S_{n-1} \leq x, \text{ on pose } \varepsilon_n = +1 \\ \text{sinon, on pose } \varepsilon_n = -1. \end{cases}$

a) Montrer que la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ change de signe une infinité de fois : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\exists\, n > p$, $\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n < 0$.

b) En déduire que la série $\sum \varepsilon_n u_n$ converge vers le réel x.

7) Soit un réel x. On prend $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

En adaptant le raisonnement précédent, montrer qu'il existe une permutation σ de $\mathbb{N}^*$ telle que $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$.

Remarque culturelle : De façon générale, pour toute série $\sum a_n$ semi-convergente et tout réel x, il existe une permutation σ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = x$. On peut aussi trouver une permutation σ telle que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} = +\infty$.