Opus 11. Réduction des matrices réelles. Corrigé

Partie A. Réduction dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une matrice diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

1) A n'a pas de racine réelle, donc son polynôme caractéristique est sans racine réelle, donc de degré pair.

2) Les racines de χ_A sont deux à deux conjuguées, avec multiplicités, et A est diagonalisable (donc dimension des sev propres = ordres de multiplicité), donc $\dim E_\lambda = \dim E_{\overline{\lambda}}$ pour toute valeur propre λ.
De plus, $AZ = \lambda Z$ ssi $A\overline{Z} = \overline{\lambda Z}$, et la famille $(Z_1, ..., Z_p)$ libre ssi la famille des conjugués $(\overline{Z_1}, ..., \overline{Z_p})$ l'est.
On peut trouver une base de vecteurs propres deux à deux conjugués : il suffit de choisir une base de E_λ, et de considérer la base des conjugués pour $E_{\overline{\lambda}}$.

3) On écrit $\sum_{i=1}^{p} \alpha_k X_k + \sum_{k=1}^{p} \beta_k Y_k = 0$. On utilise $X_k = \frac{1}{2}(Z_k + \overline{Z_k})$ et $Y_k = \frac{1}{2i}(Z_k - \overline{Z_k})$.
On se ramène ainsi à une relation entre les Z_k et $\overline{Z_k}$.
La famille étant libre, on en déduit $\alpha_k + i\beta_k = 0$ et $\alpha_k - i\beta_k = 0$, donc $\alpha_k = 0$ et $\beta_k = 0$.
Par dimension, on obtient une base de $\mathbb{R}^n$.

4) On considère l'endomorphisme a associé à A, et sa matrice dans la base $\mathcal{B} = (X_1, Y_1, ..., X_p, Y_p)$.
En effet, $AZ_k = \lambda_k Z_k$ s'écrit $\begin{cases} AX_k = a_k X_k - b_k Y_k \\ AY_k = b_k X_k + a_k Y_k \end{cases}$, où $\lambda_k = a_k + ib_k$.

Partie B. Matrices réelles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

1) Par hypothèse, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = B$.
On a ainsi $AP = PB$. Posons $P = M + iN$, avec M et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
En décomposant parties réelles et imaginaires (et sachant A et B réelles), on a $AM = MB$ et $AN = NB$.

2) a) $D(t)$ est un polynôme en t (car le déterminant est un polynôme en les coefficients).

Par hypothèse, $P(i)$ n'est pas nul. Donc P n'est pas identiquement nul
On en déduit que P admet qu'un nombre fini de racines.
A fortiori, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $D(t) \neq 0$, c'est-à-dire $M + tN$ est inversible.

b) En posant $Q = M + tN$ inversible, on a bien $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ et $AQ = QB$, c'est-à-dire $Q^{-1}AQ = B$.

Partie C

1) Sinon, le polynôme caractéristique serait de degré impair donc aurait au moins une racine réelle.

Autre méthode : Raisonner matriciellement et se placer dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2) Avec x non nul, $(x, u(x))$ est liée ssi x vecteur propre.
Le plan $\mathrm{Vect}(x, u(x))$ est stable par u, car $u(u(x)) = -x$.

3) Soit $y \in F \cap \mathrm{Vect}(x, u(x))$. On a donc $y = \alpha x + \beta u(x)$. Alors $u(y) = \alpha u(x) - \beta x \in F$.
On en déduit que $(\alpha^2 + \beta^2)x = \alpha y + \beta u(y) \in F$, donc $(\alpha, \beta) = (0, 0)$, c'est-à-dire $y = 0$.

4) On construit par récurrence une famille libre $(x_1, u(x_1), x_2, u(x_2), ..., x_p, u(x_p))$, tant que $2p \leq n$.
en effet, posons $F = \mathrm{Vect}(x_1, u(x_1), x_2, u(x_2), ..., x_p, u(x_p))$. Si $F \neq E$, il existe $x_{p+1} \notin F$.
Par c), on a $F \oplus \mathrm{Vect}(x_{p+1}, u(x_{p+1}))$.
Le procédé s'arrête nécessairement. Donc il existe p tel que $F = E$.
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$ est la matrice diagonale par blocs, où chacun des p blocs est la matrice compagnon $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie D. Sev stables

Si le polynôme caractéristique de u admet une valeur propre réelle, c'est-à-dire u admet au moins une droite stable. Supposons que tel n'est pas le cas.

1) Considérons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$ **la matrice** de u dans une base $\mathcal{B}$ de E.

En considérant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un vecteur propre $Z = X + iY$ de valeur propre $\lambda = a + ib$ non réelle.

On a $AZ = \lambda Z$, donc par identification des parties réelles et imaginaires, $\begin{cases} AX = aX - bY \\ AY = aY + aX \end{cases}$

Ainsi, $F = \mathrm{Vect}(X, Y)$ est stable par A.

Comme Z n'est pas nul, F n'est pas réduit à $\{0\}$. Comme u et donc A n'admettent pas de droite stable, alors F n'est pas une droite. Donc F est un plan.

On note x et y les vecteurs tels que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, x = X$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, y = Y$. Ainsi, $\mathrm{Vect}(x, y)$ est un plan stable par u.

2) Notons $\chi_u = P_1 P_2 ... P_r$ la décomposition de χ_u en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Comme u n'a pas de droite stable, χ_u n' a pas de racine réelle et les P_j sont irréductibles de degré 2.

On a donc $P_1(u) \circ ... \circ P_r(u) = 0$. Donc il existe au moins un j tel que $\det P_j(u) = 0$.

Posons $P_j(x) = x^2 - ax - b$. Il existe donc un vecteur non nul $x \in \mathrm{Ker}\, P_j(u)$.

Alors $F = \mathrm{Vect}(x, u(x))$ est stable par u, car $u^2(x) \in F$, et F est un plan car $u(x) \notin \mathbb{R}x$.

Partie E. Réduction des transmations orthogonales

1) cf cours. Noter la nécessité d'utiliser $u(F) = F$.

2) On vérifie d'abord que les seules valeurs propres réelles de u sont 1 et -1, car $\|u(x)\| = \|x\|$.

Ensuite, les sev propres E_1 et E_{-1} sont en somme directe orthogonale (car $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$).

Posons $F = E_1 \oplus E_{-1}$.Comme F est stable par E, $G = F^{\perp}$ est stable par u et $u_{|G} \in O(G)$.

On est ainsi ramené à étudier le cas des transformations orthogonales n'admettant pas de valeur propre réelle.

Par la partie D, il existe un plan stable, puis en appliqaunt l'hypothèse de récurrence sur l'orthogonal, on obtient $G = P_1 \oplus P_2 \oplus ... \oplus P_m$ somme directe orthogonale de plans stables par u. Les restrictions de u aux P_j sont des trasnformations orthogonales sans valeur propre réelle et donc des rotations. Ce qui permet de conclure en considérant une BON adaptée à $E_1 \oplus E_{-1} \oplus P_1 \oplus P_2 \oplus ... \oplus P_m$.

3) Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. L'endomorphisme canoniquement associé à A est une transformation orthogonale de $\mathbb{R}^n$ muni du psc, donc A est semblable à une matrice de la forme obtenue au b).

Les valeurs propres possibles sont donc 1, -1 et les $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, donc appartiennent à U.

Partie F. Preuve du théorème spectral

2) a) Considérons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$.

On a $\chi_A(x) = x^2 - (a + c) + ac - b^2 = (x - \frac{1}{2}(a + c))^2 - \Delta$, où $\Delta = \frac{1}{4}(a - c)^2 - b^2$.

Ainsi, χ_A admet deux racines réelles λ et μ, distinctes sauf si $a = c$ et $b = 0$, c'est-à-dire A homothétie.

Dans le cas où $\lambda \neq \mu$, A est donc diagonalisable et de plus E_λ et E_μ sont orthogonaux.

Donc A est dans tous les cas orthosemblable à une matrice diagonale.

b) On raisonne par récurrence d'ordre 2 sur $n = \dim E$.

La propriété est immédiate pour $n = 1$ et vraie pour $n = 2$ d'après a).

Supposons $n \geq 3$ et soit $u \in S(E)$. Par la partie D, u admet une droite ou un plan F stable par u.

Dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ adaptée à $F \oplus F^{\perp}$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \left(\begin{array}{c|c} M & O \\ \hline O & S \end{array}\right)$, avec M et S symétriques (comme matrices d'endomorphismes symétriques) et où M est d'ordre 1 ou 2.

Par a), M est orthosemblable à une matrice diagonale. De même pour S par hyp de récurrence.

On conclut via une matrice de passage orthogonale de la forme $\left(\begin{array}{c|c} U & O \\ \hline O & U \end{array}\right)$, avec U et V orthogonales.