Opus 11. Réduction des matrices réelles

Partie A. Réduction dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une matrice diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice *sans valeur propre réelle* et *diagonalisable dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1) Montrer que n est pair.

2) Montrer qu'il existe une base $(Z_1, \overline{Z_1}, Z_2, \overline{Z_2}, ..., Z_p, \overline{Z_p})$ composée de vecteurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3) On pose $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $Z_k = X_k + iY_k$. Montrer que $(X_1, Y_1, ..., X_p, Y_p)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

4) En déduire que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice diagonale poar blocs, où chacun des p blocs est une matrice de similitude $\left(\begin{array}{c|c} a & -b \\ \hline b & a \end{array}\right)$.

Remarque : On notera $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \; X \longmapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie B. Matrices réelles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices réelles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

Ainsi, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = B$.

1) Justifier l'existence de deux matrices réelles M et N telles que $\begin{cases} AM = MB \\ AN = NB \\ M + iN \text{ inversible (c'est-à-dire } \in GL_n(\mathbb{C})) \end{cases}$

2) a) On pose $D(t) = \det(M + tN)$. Justifier que D est un polynôme en t.

Sachant que $D(i) \neq 0$, montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $D(t) \neq 0$.

b) En déduire que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}AQ = B$.

Partie C. Réduction sans utiliser $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 + \mathrm{Id} = 0$.

1) Montrer que n est pair.

2) Montrer que si $x \in E = \mathbb{R}^n$ n'est pas nul, alors $(x, u(x))$ est libre et que $\mathrm{Vect}(x, u(x))$ est stable par u.

3) Soit $x \in E$ et F un sev stable par u. On suppose que $x \notin F$.

Montrer que F et $\mathrm{Vect}(x, u(x))$ sont en somme directe.

4) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (x_1, u(x_1), x_2, u(x_2), ..., x_p, u(x_p))$ de E, et préciser $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$.

Partie D. Sev stables

Montrer que tout endomorphisme réel en dim finie ≥ 1 admet au moins une droite ou un plan stable.

On proposera deux preuves :

1) En utilisant un vecteur propre Z comme à la question A.2), avec $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) En utilisant un facteur irréductible du polynôme caractéristique (polynôme annulateur).

Partie E. Réduction des transformations orthogonales

Soient E un espace euclidien et $u \in O(E)$ une transformation orthogonale.

1) Soit F un sous-espace vectoriel stable par u.

Montrer que la restriction de u à F est une transformation orthogonale et que $F^\perp$ est stable par u.

2) Soit $u \in O(E)$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in O_2^+(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe une BON $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & M(\theta_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & M(\theta_r) \end{pmatrix}$.

3) En déduire que les valeurs propres complexes d'une matrice orthogonales appartiennent à U.

Partie F. Preuve du théorème spectral

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E, c'est-à-dire vérifiant $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$.

1) Soit F un sous-espace vectoriel stable par u.

Montrer que la restriction de u à F est symétrique et que $F^\perp$ est stable par u.

2) a) Montrer que toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans une BON.

b) En déduire le théorème spectral : u est diagonalisable dans une BON.

Partie G. Réduction des endomorphismes antisymétriques

Soit u un endomorphisme antisymétrique d'un espace euclidien E, c'est-à-dire vérifiant $\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$.

On vérifie aisément comme au F) que si F est un sous-espace vectoriel stable par u, alors la restriction de u à F est antisymétrique et que $F^\perp$ est stable par u.

1) Montrer que si λ est une valeur propre de u, alors $\lambda = 0$.

2) Montrer qu'il existe une BON $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{pmatrix} O_p & & & \\ & A_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_q \end{pmatrix}$, où $A_k = \begin{pmatrix} 0 & -a_k \\ a_k & 0 \end{pmatrix}$.

3) En déduire que les valeurs propres complexes d'une matrice antisymétrique appartiennent à $i\mathbb{R}$.