Opus n°10 bis. Adjoint d'un endomorphisme. Corrigé

1) a) Un vecteur $z \in E$ est entièrement défini par les $\langle z, y\rangle$, où $y \in E$.

En effet, si $\forall y \in E$, $\langle z, y\rangle = \langle z', y\rangle$, alors $z - z'$ est orthogonal à tout vecteur, donc est nul.

Ainsi, pour tout $x \in E$, le vecteur $v(x)$, s'il existe, est unique.

b) On a $\langle v(\lambda x + \mu x') - \lambda v(x) - \mu v(x'), y\rangle = \langle v(\lambda x + \mu x'), y\rangle - \lambda \langle v(x), y\rangle - \mu \langle v(x'), y\rangle$

$= \langle \lambda x + \mu x', u(y)\rangle - \lambda \langle x, u(y)\rangle - \mu \langle x', u(y)\rangle = 0$ par bilinéarité du produit scalaire.

Donc $v(\lambda x + \mu x') - \lambda v(x) - \mu v(x') = 0$ (car orthogonal à tout vecteur).

2) On suppose désormais E de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

a) *Première méthode* : $y \longmapsto \langle x, u(y)\rangle$ est une forme linéaire sur un espace euclidien, donc de la forme $y \longmapsto \langle v(x), y\rangle$ par la représentation des formes linéaires en dimension finie.

Ce qui prouve l'existence de v. L'unicité et la linéarité résultent de 1).

Seconde méthode (conseillée) : On choisit une BON $\mathcal{B}$.

On a alors $\langle x, u(y)\rangle = (X \mid AY) = X^T AY = (A^T X \mid Y)$, donc v est définie par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, v = A^T$.

b) Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ base orthonormée de E. On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, v = (\langle e_i, v(e_j)\rangle)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq jn}$

Comme $\langle e_i, v(e_j)\rangle = \langle u(e_i), e_j\rangle$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, v = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u)^{\perp}$.

Remarque : $(U^T AU)^T = U^T (A^T) U$, avec $U \in O_n(\mathbb{R})$ matrice de passage entre deux BON.

c) On a : $x \in (\mathrm{Im}\, u)^{\perp} \Leftrightarrow \forall y \in E,\ \langle x, u(y)\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall y \in E,\ \langle v(x), y\rangle = 0 \Leftrightarrow v(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}\, v$

Donc $\mathrm{Ker}\, v = (\mathrm{Im}\, u)^{\perp}$. Comme u est l'adjoint de v, $\mathrm{Ker}\, u = (\mathrm{Im}\, v)^{\perp}$.

En passant aux orthogonaux, on obtient $\mathrm{Im}\, v = (\mathrm{Ker}\, u)^{\perp}$.

3) a) H est stable par $u \Leftrightarrow \forall y \in H,\ \langle x, u(y)\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall y \in H,\ \langle v(x), y\rangle = 0 \Leftrightarrow v(x) \in H^{\perp} = \mathbb{R}x$.

b) L'adjoint v est l'endomorphisme u canoniquement associé à $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Les matrices A et A^T admettent les mêmes valeurs propres 1 et 2. Pour obtenir les sous-espaces propres de A, on résout le système $AX = X$ et $AX = 2X$.

Pour A, on obtient les sev propres $E_1 = \mathrm{Vect}((1, -1, 0), (1, 0, -1)$ et $E_2 = \mathbb{R}(0, 0, 1)$.

Pour A^T, on obtient les sev propres $E_1' = \mathrm{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ et $E_2' = \mathbb{R}(1, 1, 1)$. On en déduit que les sev stables par u sont $\{0\}$ et $E = \mathbb{R}^3$, **t**outes les droites vectorielles incluses dans le plan E_1, ainsi que la droite $E_2 = \mathbb{R}(0, 0, 1)$, et tous les plans d'équation $\alpha x + \beta y = 0$ (avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$) et $x + y + z = 0$, qui sont respectivement les orthogonaux des droites incluses dans E_1' et E_2'.

4) a) $\langle (v \circ u)(x), y\rangle = \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, (v \circ u)(y)\rangle$, donc $v \circ u$ est symétrique.

Autre argument : La matrice $A^T A$ de $v \circ u$ dans une base orthonormée est symétrique.

On a $\langle (v \circ u)(x), x\rangle = \|u(x)\|^2 \geq 0$. Donc $v \circ u$ est symétrique positif.

b) On se place dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ composée de vecteurs propres de $v \circ u$.

Pour $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k \in E$, on a $\langle (v \circ u)(x), x\rangle = \|u(x)\|^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2$.

En prenant $0 \leq \lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$, on a donc $\langle (v \circ u)(x), x\rangle \leq \lambda_n \|x\|^2$, avec égalité si $x = e_n$.

On en déduit que $\sup_{x \neq \overrightarrow{0}} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \lambda_n$.