Opus n°10. Matrices symétriques réelles

1) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère la norme euclidienne $N(A) = \sqrt{\operatorname{tr}(A^T A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij})^2}$.

a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour toutes matrices orthogonales U et $V \in O_n(\mathbb{R})$, on a $N(UAV) = N(A)$.

b) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, où E espace euclidien. Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, ..., f_n)$ des BON de E.

On pose $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u$. Montrer que $\operatorname{tr}(A^T A)$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{B}$, et on le note $\Delta(u)$.

Montrer que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle f_i, u(e_j)\rangle^2 = \Delta(u)$. En particulier, la somme ne dépend pas du choix de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

2) On suppose $A \in S_n(\mathbb{R})$ symétrique, de valeurs propres $\lambda_1, .., \lambda_n$.

Montrer que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij})^2 = \sum_{i=1}^n (\lambda_i)^2$.

3) Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$ de rang r. On note $\lambda_1, ..., \lambda_r$ les valeurs propres non nulles de M.

Montrer qu'il existe une famille orthonormée $(Z_1, ..., Z_r)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $M = \sum_{j=1}^r \lambda_j Z_j Z_j^T$.

4) *Racine carrée symétrique positive d'une matrice symétrique positive.*

a) Soit $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive

Montrer qu'il existe une matrice symétrique positive S telle que $S^2 = M$.

b) On suppose ici $M \in\in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que MA et AM sont diagonalisables.

c) (★) Soit $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive, et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = M$.

Montrer que S et M commutent. En déduire que S est unique.

Indication : Se ramener au cas où $M = \lambda I_n$ en utilisant $SM = MS$.

5) Soient $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $N \in S_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer qu'il existe $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A^T MA = I_n$.

Remarque : Les A_j forment en fait une base orthonormée pour le produit scalaire $\langle X, Y\rangle = X^T MY = (X \mid MY)$.

b) (★) Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^T MP = I_n$ et $P^T NP = D$, où D est diagonale.

Indication : Considérer $P = AU$, avec $U \in O_n(\mathbb{R})$ bien choisie.

6) *Décomposition polaire d'une matrice.* On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

Soit $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive de valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

a) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. En utilisant 4), montrer qu'il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = A^T A$.

b) En déduire qu'il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $U \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $A = US$.

Indication : Noter que si (U, S) convient, alors on a nécessairement $A^T A = S^2$. D'où l'idée de choisir $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = A^T A$, puis de montrer que $U = AS^{-1}$ est une matrice orthogonale.

c) Montrer qu'il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $U \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $A = SU$.

Terminologie : La décomposition $A = SU$ est appelée décomposition polaire (par analogie avec $\rho e^{i\theta}$).

d) *Décomposition en valeurs singulières.* Montrer que toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $A = UDV$, où U et V orthogonales et D diagonale à coefficients réels positifs.