Opus 09. Polynômes orthogonaux. Corrigé

1) $(P, Q) \longmapsto (P \mid Q)$ est bilinéaire, symétrique, positive, et aussi définie : Si $(P \mid P) = 0$, alors $P^2\omega$ est identiquement nulle (car $P^2\omega$ est continue, positive et d'intégrale nulle), donc P s'annule sur $[a, b]$ qui est infini, donc $P = 0$.

2) On a $B_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$ et $X^n - B_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On conclut avec $X^n = (X^n - B_n) + B_n$.

3) a) On a $XB_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, et $(B_0, B_1, ..., B_n, B_{n+1})$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.

Donc $XB_n = \sum_{k=0}^{n+1} \dfrac{(B_k \mid XB_n)}{(B_k \mid B_k)}\ B_k$.

Or, on a $(B_k \mid XB_n) = (XB_k \mid B_n) = 0$, pour tout $k < n-2$, car $\deg(XB_k) \leq n-1$ et $B_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$.

Donc $XB_n \in \mathrm{Vect}(B_{n-1}, B_n, B_{n+1})$.

b) $\alpha = 1$ car B_{n+1} et XB_n sont unitaires de degré $n+1$.

c) On pose $C_n(X) = (-1)^n B_n(-X)$.

On vérifie que $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les mêmes propriétés que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Le polynôme C_n est unitaire, de degré n, et les polynômes C_n sont deux à deux orthogonaux, car

$$(C_n \mid C_m) = \int_{-a}^{+a} C_n(x)C_m(x)\ \omega(x)\ dx = (-1)^{n+m} \int_{-a}^{+a} B_n(-x)B_m(-x)\ \omega(-x)\ dx$$

Le changement de variable $y = -x$ donne $(C_n \mid C_m) = (-1)^{n+m} \int_{-a}^{+a} B_n(y)B_m(y)\ \omega(y)\ dy = (-1)^{n+m}(B_n \mid B_m)$.

4) a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

On a $(L_n \mid P) = \int_{-1}^{1} R_n^{(n)}(t)P(t)\ dt = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k[R_n^{(n-k)}(t)P^{(k)}(t)]_{-1}^{+1} + (-1)^n \int_{-1}^{1} R_n(t)P^{(n)}(t)\ dt$.

Or, 1 et -1 sont racines d'ordre n de R_n, donc pour tout $j \leq n-1$, $R_n^{(j)}(1) = 0$ et $R_n^{(j)}(-1) = 0$.

Donc tous les termes entre crochets sont nuls, et $(L_n \mid P) = (-1)^n \int_{-1}^{1} R_n(t)P^{(n)}(t)\ dt = (-1)^n(R_n \mid P^{(n)})$.

b) Ainsi, L_n est orthogonal à tout polynôme P de degré $< n$, car on a $P^{(n)} = 0$.

Or, L_n est de degré n, donc B_n et L_n sont colinéaires.

Comme le coefficient dominant de L_n est $(2n)(2n-1)...(n) = \frac{(2n)!}{n!}$, on obtient donc $B_n = \frac{n!}{(2n)!} L_n$.

c) On montre par récurrence sur $j \leq n$, $R_n^{(j)}$ admet au moins j racines sur $]-1, 1[$.

La propriété est immédiate pour $j = 0$.

Supposons vraie au rang $j \leq n-1$. Comme on a aussi $R_n^{(j)}(1) = 0$ et $R_n^{(j)}(-1) = 0$, alors $R_n^{(j)}$ admet au moins $(j+2)$ racines sur $[-1, 1]$, donc par Rolle, $R_n^{(j+1)}$ admet au moins $(j+1)$ racines sur $]-1, 1[$.

On en déduit que $L_n = R_n^{(n)}$ admet au moins n racines sur $]-1, 1[$. Comme $\deg L_n = n$, alors ce sont les seules racines de L_n et elles sont simples (et L_n est scindé à racines simples).

5) $B_n(t)P(t)$ de signe constant sur $]a, b[$, car ses racines sont toutes d'ordre pair.

Comme B_nP n'est pas identiquement nul, alors $(B_n \mid P) \neq 0$, donc $r = \deg P \geq n$.

Ainsi, B_n admet n racines d'ordre impair sur $]a, b[$. Ce sont donc des racines simples et B_n est scindé.