Opus 09. Polynômes orthogonaux

Propriétés générales. Soit $\omega :]a,b[\to \mathbb{R}$ est une application continue et strictement positive sur $]a,b[$, et telle que les applications $t \longmapsto \omega(t)t^n$ soient intégrables sur $]a,b[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On considère $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $(P \mid Q) = \int_a^b P(t)Q(t)\ \omega(t)dt$.

1) Montrer que $(P,Q) \longmapsto (P \mid Q)$ définit un produit scalaire.

2) Montrer qu'il existe une unique base orthogonale $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ formée de polynômes unitaires de degrés échelonnés.

3) a) Soit $n \geq 1$. En utilisant $(XP \mid Q) = (P \mid XQ)$, montrer qu'il existe $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$XB_n = \gamma B_{n+1} + \alpha B_n + \beta B_{n-1}.$$

Indication : Ecrire XB_n dans la base orthogonale de $\mathbb{R}_{n+1}[X].(B_0, B_1, ..., B_n, B_{n+1})$ et exprimer les coordonnées en fonctions notamment des produits scalaires $(XB_n \mid B_k)$. Puis utiliser le fait que $(B_n \mid XB_k) = 0$ pour $k \leq n-2$.

b) Justifier que $\gamma = 1$. Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ vérifie une relation de récurrence d'ordre 2}}$ de la forme

$$B_{n+1} = (X-\alpha)B_n - \beta B_{n-1}$$

Remarque : Ici, α et β dépendent en général de n.

c) On suppose ici de plus $a = -b$ et que ω est pair. Montrer que $B_n(-X) = (-1)^n B_n(X)$. Montrer que $\alpha = 0$.

Indication : Montrer que la suite des $C_n(X) = (-1)^n B_n(-X)$ vérifie les mêmes propriétés que la suite des B_n.
En déduire ensuite que $\alpha B_n = XB_n - B_{n+1} - \beta B_{n-1}$ est un polynôme à la fois pair et impair, donc $\alpha B_n = 0$.
On peut aussi obtenir $\alpha = 0$ en montrant que $(XB_n \mid B_n) = 0$: en effet, $X{B_n}^2$ est impair donc $\int_{-b}^b xB_n(x)^2\ dx = 0$.

Polynômes de Legendre.

4) On considère sur $\mathbb{R}[X]$ le produit scalaire $(P \mid Q) = \int_{-1}^{+1} P(t)Q(t)\ dt$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $R_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = \left[(X^2-1)^n\right]^{(n)}$ (dérivée n-ième de R_n). On a $\deg L_n = n$.

a) Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X]\ (L_n \mid P) = (-1)^n(R_n \mid P^{(n)})$. En déduire que $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], (L_n \mid P) = 0$.

Indication : Démontrer $(L_n \mid P) = (-1)^n(R_n \mid P^{(n)})$ en utilisant des intégrations par parties successives.
On justifiera en particulier que $(R_n)^{(k)}(1) = (R_n)^{(k)}(-1) = 0$ pour tout $k < n$.

b) Avec les notations de 1), en déduire que $B_n = \dfrac{n!}{(2n)!}L_n$.

c) En utilisant le théorème de Rolle, montrer que L_n admet n racines appartenant à $]-1,1[$.

On en déduit que L_n (et donc B_n) est scindé à racines simples.

Remarque anecdotique : En utilisant 3), puis par identification sur les coefficients en X^n et X^{n-1}, on peut montrer que la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence : $L_{n+1} = (4n+2)XL_n - 4n^2L_{n-1}$.

Retour au cas général

5) Montrer que B_n est scindé à racines simples sur $]a,b[$.

Indication : On note $x_1, ..., x_r$ les racines distinctes d'ordre impair sur $]a,b[$. Cconsidérer $P(t) = \prod_{i=1}^r (t-x_i)$.